

Análise Matemática I (B, C, D e E)

2º Teste — 13 de Dezembro de 2014

Esta é apenas uma sugestão de resolução, de entre muitas outras possibilidades.

1. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 6) & x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x)\log(x+1) & 0 < x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})} & x > 1 \end{cases}$$

- (a) [1.0 val.] Sabendo que a função f é contínua em $x = 0$, estude a sua diferenciabilidade no mesmo ponto.
- (b) [1.5 val.] Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}$.
- (c) [1.0 val.] Tendo em conta a alínea anterior e sabendo que $\operatorname{sen}(1)\log(2) < f(1)$, justifique a existência, ou não, de um extremo relativo em $x = 1$.

Resolução:

- (a) Começemos por determinar as derivadas laterais de f em $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)\log(x+1)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \log(x+1) = 1 \cdot \log(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_e(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 - 6)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 6 = -6 \end{aligned}$$

Como $f'_d(0) \neq f'_e(0)$, podemos concluir que f não é diferenciável (nem derivável) em $x = 0$.

- (b) O limite pedido corresponde a uma indeterminação do tipo $1^{+\infty}$. Temos que,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\log(x^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})})} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \log(x^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})})},$$

justificando-se a última igualdade com a continuidade da função exponencial.

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \log(x^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \log(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(x)}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi x}{2})}.$$

Neste caso, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \log(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$. Sabemos ainda que as funções $\log(x)$ e $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ são diferenciáveis no intervalo $]1, 2[$ e que

$$\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)' = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \neq 0, \forall x \in]1, 2[.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\log(x))'}{(\cotg(\frac{\pi x}{2}))'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{sen}^2(\frac{\pi x}{2})}} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

existe.

Aplicando a Regra de Cauchy, podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \log \left(x^{\text{tg}(\frac{\pi x}{2})} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\log(x))'}{(\cotg(\frac{\pi x}{2}))'} = -\frac{2}{\pi}.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\text{tg}(\frac{\pi x}{2})} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

(c) Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \text{sen}(x) \log(x+1) = \text{sen}(1) \log(2) < f(1)$. Pela alínea anterior,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\text{tg}(\frac{\pi x}{2})} = e^{-\frac{2}{\pi}} < e^0 = 1 < f(1) = 2.$$

Assim, f é descontínua em $x = 1$. Contudo, os limites anteriores permitem-nos garantir a existência de um intervalo $]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$, com $\epsilon > 0$, tal que $f(x) \leq f(1), \forall x \in]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$. Logo $f(1)$ é um máximo relativo de f e por isso existe um extremo relativo de f em $x = 1$.

2. [2.0 val.] Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + 4bx^2 + ax + 6.$$

Verifique se existem a e b de forma a que $(0, f(0))$ seja um ponto de inflexão e $f(1)$ seja um mínimo relativo. Note que deve justificar detalhadamente por que razão, para os valores de a e b encontrados, se trata efectivamente de um extremo relativo e de um ponto de inflexão.

Resolução: Para que $(0, f(0))$ seja um ponto de inflexão e $f(1)$ seja um mínimo relativo é necessário (pode não ser suficiente) que $f''(0) = 0$ e $f'(1) = 0$.

Temos que f é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$, porque se trata de um polinómio. A primeira e a segunda derivadas de f são dadas, respectivamente, por $f'(x) = x^4 + 8bx + a$ e $f''(x) = 4x^3 + 8b$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Assim, $f''(0) = 0$ e $f'(1) = 0$ se, e só se, $8b = 0$ e $1 + 8b + a = 0$, o que equivale a ter $b = 0$ e $a = -1$.

Determinados dois valores para a e b , respectivamente, verifiquemos se estes permitem garantir que $(0, f(0))$ é um ponto de inflexão e que $f(1)$ é um mínimo relativo de $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x + 6$.

A esta função correspondem as derivadas $f'(x) = x^4 - 1$ e $f''(x) = 4x^3$. Note-se que $f''(1) = 4 > 0$, pelo que podemos concluir que $f(1)$ é efectivamente um mínimo relativo de f .

Quanto ao ponto de inflexão, verificamos que se $x < 0$, $f''(x) < 0$ e se $x > 0$, $f''(x) > 0$. Daqui se deduz que existe mudança do sentido da concavidade da função em $x = 0$, pelo que o ponto $(0, f(0))$ é realmente um ponto de inflexão de f .

3. [2.0 val.] Escreva a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange de ordem 2 para a função $f(x) = e^{\text{sen}(x)}$.

Resolução: A função f é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$, porque resulta da composta da função exponencial com a função seno, ambas funções de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Assim, podemos escrever a sua fórmula de MacLaurin de qualquer ordem. Como o resto deverá ser de Lagrange de ordem 2, temos, para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{\text{sen}(x)} = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(c),$$

com c entre x e 0. Calculemos f' e f'' :

$$f'(x) = \cos(x)e^{\text{sen}(x)}$$

$$f''(x) = (-\text{sen}(x) + \cos^2(x))e^{\text{sen}(x)}.$$

Assim, $f(0) = e^{\text{sen}(0)} = 1$ e $f'(0) = \cos(0)e^{\text{sen}(0)} = 1$. Substituindo os valores na fórmula anteriormente explicitada vem:

$$f(x) = e^{\text{sen}(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2}(-\text{sen}(c) + \cos^2(c))e^{\text{sen}(c)},$$

com c entre x e 0.

4. Calcule

(a) [2.0 val.] $\int (x+1) \cos(-3x) dx;$

(b) [2.5 val.] $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt{x})} dx.$

Resolução:

- (a) Utilizando primitivação por partes, em que escolhemos $\cos(-3x)$ como função a primitivar, temos:

$$\begin{aligned} \int (x+1) \cos(-3x) dx &= -\frac{1}{3}\text{sen}(-3x)(x+1) - \int -\frac{1}{3}\text{sen}(-3x) dx = \\ &= -\frac{1}{3}\text{sen}(-3x)(x+1) + \frac{1}{9}\cos(-3x) + c, \end{aligned}$$

onde c uma constante real.

- (b) Neste caso, consideremos a substituição $x = \phi(t) = t^4$. Temos $\phi'(t) = 4t^3$ e como $x \in [1, 2]$, então $t \in [1, \sqrt[4]{2}]$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt{x})} dx &= \int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{4t^3}{t^3(1+t^2)} dx = \int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{4}{1+t^2} dx = \\ &= 4[\arctg(t)]_1^{\sqrt[4]{2}} = 4\arctg(\sqrt[4]{2}) - 4\arctg(1) = 4\arctg(\sqrt[4]{2}) - \pi \end{aligned}$$

5. Considere a função $F(x) = \int_0^{4x} \sqrt{t} e^t dt$.

- (a) [1.5 val.] Determine, justificando, o domínio de F e calcule a sua derivada.
 (b) [1.5 val.] Prove que $F(1) \leq 8e^4$. (Sugestão: Aplique o T. Lagrange à função F no intervalo $[0, 1]$)

Resolução:

- (a) Seja $f(t) = \sqrt{t} e^t$. Para que esta função esteja bem definida, temos que ter $t \geq 0$, pelo que $D_f = [0, +\infty[$. O intervalo de integração é $[0, 4x]$ ou $[4x, 0]$, para $x \geq 0$ ou para $x < 0$, respectivamente. No primeiro caso, a condição $t \geq 0$ é sempre satisfeita. No segundo caso, para que $t \geq 0$, é necessário impor que $4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, que não pertence ao domínio em causa. Concluimos assim que $D_F = [0, +\infty[$.

Atendendo a que $f(t) = \sqrt{t} e^t$ é contínua no seu domínio, isto é, em $[0, +\infty[$, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante a diferenciabilidade de $\phi(x) = \int_0^x \sqrt{t} e^t dt$, sendo $\phi'(x) = f(x) = \sqrt{x} e^x$. Como, $F(x) = \phi(4x)$, temos $F'(x) = \phi'(4x) \cdot 4 = 4\sqrt{4x} e^{4x} = 8\sqrt{x} e^{4x}$, para qualquer $x \in]0, +\infty[$.

- (b) Como resultado da alínea anterior sabemos que F é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $]0, 1[$. Estamos assim nas condições do Teorema de Lagrange, pelo que concluimos existir $c \in]0, 1[$ tal que

$$F'(c) = 8\sqrt{c} e^{4c} = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F(1).$$

Como $0 < c < 1$, vem $0 < 8\sqrt{c} e^{4c} < 8e^4$. Logo, temos $F(1) < 8e^4$.

6. [2.0 val.] Considere a figura abaixo, onde estão desenhados os gráficos das funções

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1 \text{ e } g(x) = x^3 - x^2 + 1, \text{ no intervalo } [-1, 3].$$

Escreva sob a forma de integral, sem o calcular, a área da região a sombreado.

Resolução:

Começamos por calcular os pontos de intersecção das funções f e g . Temos

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 1 = x^3 - x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2.$$

No intervalo $[-1, 0]$, $g \geq f$ (basta ver, por exemplo, que $g(-1/2) > f(-1/2)$). Em $[0, 2]$, $f \geq g$, pois, por exemplo, $f(1) > g(1)$. Por último, em $[2, 3]$, $f > 0$. Assim, o valor correspondente à área do domínio indicado é dado por

$$\int_{-1}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx + \int_2^3 f(x) dx.$$

7. Considere a função $f(x) = \frac{4x-4}{x(x^2+2)}$.

(a) [2.0 val.] Determine uma primitiva de f .

(b) [1.0 val.] Calcule, por definição, o valor do integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Resolução:

(a) A função f é uma função racional, o numerador e o denominador não têm factores comuns e o denominador já está factorizado (x^2+2 não tem raízes reais). Sabemos que

$$f(x) = \frac{4x-4}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2},$$

onde A , B e $C \in \mathbb{R}$ são constantes que podemos determinar. Reduzindo ao mesmo denominador obtém-se

$$f(x) = \frac{4x-4}{x(x^2+2)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+2A}{x(x^2+2)}.$$

Assim, $A+B=0$, $C=4$ e $2A=-4$, ou seja, $A=-2$, $B=2$ e $C=4$. Daqui resulta que:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{-2}{x} + \frac{2x+4}{x^2+2} dx = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{2x+4}{x^2+2} dx = \\ &= -2 \log|x| + \int \frac{2x}{x^2+2} dx + 2\sqrt{2} \int \frac{1/\sqrt{2}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \\ &= -2 \log|x| + \log(x^2+2) + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c, \end{aligned}$$

com c uma constante real.

(b) Por definição e usando a alínea anterior, temos

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2 \log(t) + \log(t^2+2) + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right]_1^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 \log(x) + \log(x^2+2) + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \log(3) - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right) + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \log(3) - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \log(3) - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) = \\ &= 0 + \sqrt{2} \pi - \log(3) - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$