An´alise Matem´atica I (B, C, D e E)

1o Teste — 1 de Novembro de 2014

(Dura¸c˜ao 1:30)

1. Considere os seguintes subconjuntos de R:

*A* =

*x ∈* R :3*x − x*2

log2(*|x −* 1*|*)*≥* 0

e

*B* =

*x ∈* R : *x* =(*−*1)*n*

*n* + 3*, n ∈* N

*.*

(a) [1.5 val.] Explicite o conjunto *A* sob a forma de um intervalo ou de uma uni˜ao de intervalos.

(b) [1.5 val.] Determine o interior e a fronteira do conjunto *A∪B*. Indique, justificando, se *A ∪ B* ´e um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado. (c) [0.5 val.] Determine o derivado do conjunto *A ∪ B*.

(d) [0.5 val.] O conjunto *A ∪ B* admite m´aximo? Justifique.

Nota: Se n˜ao conseguiu resolver a al´ınea (a) considere o conjunto *A* =]0*,* 3[*∪*]3*,* 5] na resolu¸c˜ao das restantes al´ıneas.

2. Seja (*un*)*n∈*N a sucess˜ao definida por recorrˆencia por:





Note que *un >* 0*, ∀n ∈* N*.*

*u*1 =12*,*

*un*+1 = *un*

*un* +14*, ∀n ∈* N*.*

(a) [2.0 val.] Prove, usando o Princ´ıpio de Indu¸c˜ao Matem´atica, que *un ≤*12*, ∀n ∈* N. (b) [1.5 val.] Mostre que a sucess˜ao (*un*)*n∈*N ´e mon´otona decrescente. (c) [1.5 val.] Justifique que (*un*)*n∈*N ´e uma sucess˜ao convergente e determine o seu limite.

v.s.f.f.

*−→*

3. Determine o valor dos seguintes limites: (a) [1.5 val.] lim *n→*+*∞√n*2*~~n~~* + 3*~~n~~*

(b) [1.5 val.] lim *n→*+*∞*

3 + *n*2 2*n*2 *−* 5 2*n*

 *n*

cos(*n*2 + 1)

(c) [1.5 val.] lim *n→*+*∞*X *k*=0

1

*~~√~~*3*n*~~2~~ + *k*

4. Considere a fun¸c˜ao *f* : *Df ⊂* R *→* R, definida por:

*f*(*x*) = arcsin(*x*2 *−* 4)*x*2 + *x −* 6

*x −* 2*.*

(a) [1.5 val.] Determine o conjunto *Df* , correspondente ao dom´ınio de *f*. (b) [0.5 val.] Analise *f* quanto `a continuidade.

(c) [1.5 val.] Defina *g* um prolongamento por continuidade de *f* a *Df* (ou seja, `a aderˆencia de *Df* ).

(d) [1.0 val.] Justifique que *g* ´e limitada em *Df* .

5. Seja *h* uma fun¸c˜ao cont´ınua em R e tal que existem *a, b ∈* R que satisfazem: *h*(*a*) = *b* e *h*(*b*) = *−b*3*.*

(a) [1.0 val.] Mostre que *h* tem pelo menos um zero.

(b) [1.0 val.] Utilize a al´ınea anterior para justificar que existe *k ∈* R tal que a fun¸c˜ao real de vari´avel real definida por

*h*(*x*) , se *x ≥ k*

0 , se *x < k*

´e cont´ınua em R.

*m*(*x*) =