FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Exame de Época de Recurso — 8 de Janeiro de 2015
(Duração 3:00)

Justifique convenientemente todas as respostas.

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \frac{\sqrt{x-1}}{|x-1|-2} \geq 0 \right\} \qquad \text{e}$$
$$B = \{ x \in \mathbb{R} : \ x = (-1)^n - 3, \ n \in \mathbb{N} \} .$$

Nota: Se não conseguir resolver a alínea (a) considere o conjunto $A =]5, +\infty[$ na resolução das restantes alíneas.

(a) **[0.5 val.]** Explicite o conjunto A sob a forma de um intervalo ou de uma união de intervalos.

(b) **[0.5 val.]** Determine o interior e a fronteira do conjunto $A \cup B$. Indique, justificando, se $A \cup B$ é um conjunto aberto, fechado, ou nem aberto, nem fechado.

(c) **[0.5 val.]** Determine o derivado do conjunto $A \cup B$.

(d) **[0.5 val.]** Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cup B$.

2. **[1.5 val.]** Prove, usando o Princípio de Indução Matemática, que

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n-3) = n(2n-1)$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

3. Determine, se existir, o valor dos seguintes limites:

(a) **[1.0 val.]** $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$;

(b) **[1.0 val.]** $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1} \right)^{n+1}$;

(c) **[1.0 val.]** $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{n + \cos(k\,\pi)}{3n^2+1}$.

v.s.f.f.
$\longrightarrow$

4. Considere a função $h : D_h \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} \text{arcsen}(|x^2 - 1|) & x \leq \sqrt{2} \\ \\ \text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2}}}\right) & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

(a) **[1.0 val.]** Determine o conjunto D_h, correspondente ao domínio de h.

(b) **[1.0 val.]** Verifique se h é contínua no seu domínio.

(c) **[0.5 val.]** Justifique que a equação $h(x) = \frac{x}{2}$ tem solução no intervalo $[1, \sqrt{2}]$.

5. Seja f uma função contínua no domínio $[0, +\infty[$, tal que $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e que satisfaz em todo o seu domínio:

$$xf(x) = \cos(f(x))$$

(a) **[0.5 val.]** Prove que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(b) **[0.5 val.]** Justifique que f é limitada em $[0, L]$, para todo o $L > 0$ e, usando este resultado e a alínea anterior, prove que f tem um máximo absoluto em $[0, +\infty[$.

6. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cuja derivada é dada por:

$$g'(x) = \arctan(x^2 - 1).$$

(a) **[1.0 val.]** Determine e classifique os extremos relativos de g.

(b) **[0.5 val.]** Verifique se a função admite pontos de inflexão.

7. **[1.0 val.]** Considere a função $f(x) = \log(\sin(x) + 1)$. Escreva a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange de ordem 2 para a função f.

8. **[1.0 val.]** Determine o número exacto de soluções da equação

$$(x^2 - 1)\log(x + 1) - \frac{x^2}{2} + x = 0.$$

9. **[1.0 val.]** Calcule o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x - \text{tg}(x)}.$$

v.s.f.f.

$\longrightarrow$

10. Calcule

   (a) **[1.0 val.]** $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx$;

   (b) **[1.0 val.]** $\displaystyle\int \cos(x^2)x^3 dx$;

   (c) **[1.0 val.]** $\displaystyle\int_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

11. **[1.0 val.]** Considere a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^t \log(1+t)dt$. Indique o domínio de F e determine $F'(x)$, justificando a sua resposta.

12. **[1.0 val.]** Considere o domínio limitado pelas linhas de equação $y = x^2$ e $y = k - x^2$, com $k > 0$ uma constante real. Determine o valor de k por forma a que a área correspondente ao domínio indicado seja igual a $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

13. **[0.5 val.]** Determine a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{x^4+1}\,dx.$$

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}},\right.$ $\left.\ldots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{a\,x+b}{c\;x+d} = t^\mu$ $\mu =$ m.m.c.$\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c})$	$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = \sqrt{a}\,x + t$, se $a > 0$ $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = t\,x + \sqrt{c}$, se $c > 0$
$f(x) = \sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\,\text{sen}(t)$ ou $x = a\cos(t)$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$ $R(-\text{sen}(x), -\cos(x)) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(x) = t$