Análise Matemática I E

Terceiro Teste (29/5/2013)

Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

Pergunta 1

a) $\int x\cos x\, dx = x\,\mathrm{sen}\,x - \int \mathrm{sen}\,x\, dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + c$, com c uma constante real

$f = \cos x \quad F = \mathrm{sen}\,x$

$g = x \quad g' = 1$

b) $\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^2\, x e^{x^2} dx = \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx =$

$f = x e^{x^2} \quad F = \frac{e^{x^2}}{2}$

$= \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2} + c$, com c uma constante real

$g = x^2 \quad g' = 2x$

Pergunta 2

a) $\int_0^2 \frac{x+2}{x^2-3x-4}\, dx$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

Assim,

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{A(x+1)+B(x-4)}{x^2-3x-4}$$

Donde

$$x+2 = A(x+1) + B(x-4)$$

Se $x=4$ temos $6 = 5A \Leftrightarrow A = \frac{6}{5}$

Se $x=-1$ temos $1 = -5B \Leftrightarrow B = -\frac{1}{5}$

Logo

$$\int_0^2 \frac{x+2}{x^2-3x+4}\,dx = \int_0^2 \frac{6}{5}\frac{1}{x-4} - \frac{1}{5}\frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \left[\frac{6}{5}\log|x-4| - \frac{1}{5}\log|x+1|\right]_0^2 =$$

$$= \frac{6}{5}\log 2 - \frac{1}{5}\log 3 - \frac{6}{5}\log 4$$

$$= \frac{6}{5}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\log 3 = -\frac{6}{5}\log 2 - \frac{1}{5}\log 3$$

b)

$$\int_0^4 \frac{x+2}{x^2+16}\, dx = \int_0^4 \frac{x}{x^2+16} + \frac{2}{x^2+16}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{2x}{x^2+16}\, dx + \frac{1}{8}\int_0^4 \frac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(x^2+16)\right]_0^4 + \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{1/4}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log 32 - \frac{1}{2}\log 16 + \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{8}$$

Pergunta 3

$$\int_1^2 \frac{3x}{1+\sqrt[3]{3x+2}}\, dx = \int_{\sqrt[3]{5}}^2 \frac{3\left(\frac{t^3}{3} - \frac{2}{3}\right)}{1+t}\, t^2\, dt = \int_{\sqrt[3]{5}}^2 \frac{t^5 - 2t^2}{1+t}\, dt$$

$\sqrt[3]{3x+2} = t \Leftrightarrow 3x+2 = t^3$

$\Leftrightarrow 3x = t^3 - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{t^3}{3} - \frac{2}{3}$

Se $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt[3]{5}$

Se $x = 2 \Rightarrow t = \sqrt[3]{8} = 2$

Pergunta 4

Utilizando a substituição $tg\left(\frac{x}{2}\right)=t$, começamos por exprimir $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ como funções da variável t.

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} x = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2+1 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cancel{\pm} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{pois } tg\left(\frac{x}{2}\right)=t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = tg\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Assim

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad e \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Logo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\operatorname{sen} x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$x = 2\operatorname{arctg} t$

Se $x=0$ então $t=tg\,0=0$ e se $x=\frac{\pi}{2}$ então $t=tg\,\frac{\pi}{4}=1$

$$= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+1-t^2+2t}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = \left[\log|1+t| \right]_0^1 = \log 2$$

Pergunta 5

$$x^3 + x^2 - 4 = x^3 - x + 8 \iff$$

$$\iff x^2 + x - 12 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} -4 \\ 3 \end{cases}$$

Entre $x = 0$ e $x = 4$ as duas funções têm uma única intersecção em $x = 3$. Assim

$$\text{Área} = \left| \int_0^3 x^3 + x^2 - 4 - x^3 + x - 8 \, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_3^4 x^3 + x^2 - 4 - x^3 + x - 8 \, dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^3 x^2 + x - 12 \, dx \right| + \left| \int_3^4 x^2 + x - 12 \, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 12x \right]_0^3 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 12x \right]_3^4 \right| =$$

$$= \left| 9 + \frac{9}{2} - 36 \right| + \left| \frac{64}{3} + 8 - 48 - 9 - \frac{9}{2} + 36 \right| =$$

$$= 36 - 9 - \frac{9}{2} + \frac{64}{3} + 8 - 48 - 9 - \frac{9}{2} + 36 =$$

$$= 27 - 9 + 27 - 40 + \frac{64}{3} = 17 - 9 + \frac{64}{3} = 8 + \frac{64}{3} = \frac{80}{3}$$

Pergunta 6

O domínio de $F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\, dt$ é indicado como sendo igual a $\mathbb{R}^+$. Tal significa que $t > 0$ pelo que $\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}$ é uma função contínua pois resulta do quociente de duas funções contínuas.

O Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante então a diferenciabilidade de F e que

$$F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Pergunta 7

$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4}\, dx$ é um integral impróprio de primeira espécie pois o domínio de integração é ilimitado mas a função integranda é limitada em qualquer subconjunto limitado do domínio de integração.

Assim

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4}\, dx = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{t}{(t^2+1)^4}\, dt =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \int_1^x t\,(t^2+1)^{-4}\,dt =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{(t^2+1)^{-3}}{-3 \times 2} \right]_1^x = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{6} \frac{1}{(x^2+1)^3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$