Análise Matemática I E

Segundo teste - 24/04/2013

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possíveis.

Questão 1

a) Começemos por determinar o domínio de f.
Para $x \geq 2$ a função está sempre bem definida pois quer a função $\operatorname{artg} x$, quer os polinómios têm domínio $\mathbb{R}$.
Para $x < 2$ a função também está bem definida pois a função exponencial e as funções polinomiais têm domínio $\mathbb{R}$.
Passemos agora à análise da continuidade da função.
Para $x > 2$ a função é contínua pois é definida como a soma de duas funções contínuas, uma constante e a composta de duas funções contínuas ($\operatorname{arctg} x$ e uma função polinomial).

Para $x < 2$ a função é contínua pois é definida como a composta de duas funções contínuas (a função exponencial e um polinómio)

Para $x=2$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \geq 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x \geq 2}} \operatorname{arctg}((x-2)^2)+1 = \operatorname{arctg} 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} e^{x^2-3x+2} = e^{4-6+2} = e^0 = 1$$

Como os dois limites anteriores são iguais podemos concluir que f é contínua em $x=2$.

$\therefore$ f é contínua em $\mathbb{R}$

b) Para $x \geq 2$, f é diferenciável pois é definida como a soma de duas funções diferenciáveis, uma constante e a composta de duas funções diferenciáveis (arctg x e um polinómio). Neste caso:

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x-2)^2} \cdot 2(x-2)$$

Para $x<2$, a função é diferenciável pois é definida como a composta de duas funções diferenciáveis (a exponencial e um polinómio). Assim

$$f'(x) = e^{x^2-3x+2}(2x-3)$$

Para $x=2$

$$f'_d(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\operatorname{arctg}((x-2)^2)+1-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\operatorname{arctg}((x-2)^2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\operatorname{arctg}((x-2)^2) - \operatorname{arctg}((2-2)^2)}{x-2} =$$

$$= \frac{1}{1+(2-2)^2} \cdot 2(2-2) = 0$$

pois $\operatorname{arctg}((x-2)^2)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$

$$f'_e(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{x^2-3x+2}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{x^2-3x+2} - e^{2^2-3\times 2+2}}{x-2} =$$

$$= e^{2^2-3\times 2+2}(2\times 2-3) = 1$$

porque e^{x^2-3x+2} é diferenciável em $\mathbb{R}$

Como $f'_d(2) \neq f'_e(2)$, f não é diferenciável em $x=2$.

Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(x-2)^2}\, 2(x-2), & \text{se } x > 2 \\ e^{x^2-3x+2}(2x-3), & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

e)

		$\frac{3}{2}$		2	
$\frac{1}{1+(x-2)^2} \cdot 2(x-2)$					$+$
$e^{x^2-3x+2}(2x-3)$	$-$	0	$+$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

Mínimo relativo

f é decrescente em $]-\infty, 3/2[$

f é crescente em $]\frac{3}{2}, +\infty[$, dado que é contínua em $x=2$

f tem um mínimo relativo em $x=\frac{3}{2}$.

Questão 2

Começamos por determinar a segunda derivada da função g.

$$g''(x) = e^{\frac{1}{2}x^2+2x} + (x-4)\, e^{\frac{1}{2}x^2+2x}(x+2), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

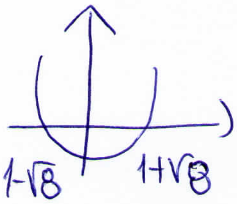
$$g''(x)=0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x^2+2x}(1 + x^2 - 4x + 2x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x^2+2x}(x^2 - 2x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+28}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{2} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{8}$$

Assim, atendendo a que $e^{\frac{1}{2}x^2+2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, analisar o sinal de g'' equivale a analisar o sinal de x^2-2x-7.



Logo,

f tem a concavidade voltada para cima em

$$]-\infty, 1-\sqrt{8}[\cup]1+\sqrt{8}, +\infty[$$

f tem a concavidade voltada para baixo em

$$]1-\sqrt{8}, 1+\sqrt{8}[$$

f tem pontos de inflexão em $x = 1-\sqrt{8}$ e $x = 1+\sqrt{8}$.

Questão 3

$$\lim_{x\to 0} \cos(x^2)^{\operatorname{cotg} x} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to 0} e^{\log\left(\cos(x^2)^{\operatorname{cotg} x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{cotg} x \log(\cos(x^2))} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x^2))}{\operatorname{tg} x}}$$

porque a função exponencial é contínua

Determinemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x^2))}{tg\, x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$\log(\cos(x^2))$ e $tg\, x$ são diferenciáveis em $]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi/2}[$

$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0, \forall x \in]-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}[$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\log(\cos(x^2)))'}{(tg\, x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x^2)} \cdot (-sen(x^2))\, 2x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 0$$

Pelo Regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x^2))}{tg\, x} = 0, \text{ logo}$$

$$\lim_{x\to 0} \cos(x^2)^{\cot g\, x} = e^0 = 1.$$

Questão 4

a) $f \in C^\infty(]1,+\infty[)$ logo é possível escrever a fórmula de taylor de f, de qualquer ordem, para qualquer ponto deste intervalo.

$$f(2) = (2-1)\log(2-1) = 0$$

$$f'(x) = \log(x-1) + (\cancel{x-1})\frac{1}{\cancel{x-1}} = \log(x-1) + 1 \quad f'(2) = 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x-1} \quad f''(2) = 1$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Assim

$$f(x) = f(2) + (x-2)f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2}f''(2) + \frac{(x-2)^3}{6}f'''(c), \text{ com } c$$

entre 2 e x

sai:

$$(x-1)\log(x-1) = (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{6}\left(-\frac{1}{(c-1)^2}\right)$$

b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-1)\log(x-1) - (x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)} + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{6}\left(-\frac{1}{(c-1)^2}\right) - \cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{2} + \frac{(x-2)}{6}\left(-\frac{1}{(c-1)^2}\right) = \frac{1}{2}$$ pois c tende para

2 quando x tende para 2.

Questão 5

a) A função f será par se

$$f(-x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(-x) = (-x)^2 \operatorname{arctg}((-x)^2) + (-x)^2 - 1 - \frac{1}{2}\log((-x)^4+1) =$$
$$= x^2 \operatorname{arctg}(x^2) + x^2 - 1 - \frac{1}{2}\log(x^4+1) = f(x)$$

$\therefore f$ é par

b)

$$x^2 \operatorname{arctg}(x^2) + x^2 = 1 + \frac{1}{2}\log(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \operatorname{arctg}(x^2) + x^2 - 1 - \frac{1}{2}\log(x^4+1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

f é diferenciável em $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x \operatorname{arctg}(x^2) + x^2 \frac{1}{\cancel{1+x^4}} 2x + 2x - \frac{1}{2}\frac{4x^3}{\cancel{x^4+1}} =$$
$$= 2x(\operatorname{arctg}(x^2) + 1)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(\operatorname{arctg}(x^2) + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pois $x^2 \geq 0 \Rightarrow \operatorname{arctg}(x^2) \geq 0$

Atendendo a que f' tem um único zero, o Teorema de Rolle garante que f terá no máximo dois zeros.

Como f é par e $f(0) = -1 \neq 0$, f terá um número par de zeros ou não terá zeros.

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \cancel{1} - \cancel{1} - \frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 =$$

$$= \frac{\pi - 2\log 2}{4} = \frac{\pi - \log(4)}{4} > 0 \text{ pois } \log(4) < \log(e^2) = 2$$

$f(0) = -1 < 0$

f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que o Teorema de Bolzano garante que f tem pelo menos um zero.

Como f tem um número par de zeros e no máximo dois, f tem exactamente dois zeros.