FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Exame de Época de Recurso — 21 de Junho de 2013

1. **[1,0 val.]** Seja D o domínio da função f, real de variável real, definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. Determine o interior e a fronteira do conjunto

$$D \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Calcule os limites das seguintes sucessões:

   (a) **[1,0 val.]** $a_n = (-1)^n \log\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \cdot \cos(n)$;

   (b) **[1,0 val.]** $b_n = \left(\dfrac{n+5}{3n+1}\right)^{n+2}$.

3. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \operatorname{arctg}(x) - \dfrac{2}{x^2+1}, & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

   (a) **[0,5 val.]** Determine o domínio de f.

   (b) **[0,5 val.]** Estude f quanto à continuidade.

   (c) **[1,5 val.]** Estude a função f quanto à diferenciabilidade, monotonia e existência de extremos relativos.

4. **[1,5 val.]** Considere uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, cuja função derivada é definida pela seguinte expressão:

$$g'(x) = \frac{x+2}{x^2+1}.$$

Estude o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão de g.

5. **[1,5 val.]** Calcule, justificando, o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt}{x^3}.$$

6. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

   (a) **[1,0 val.]** Utilizando o princípio de indução matemática, prove que a n-ésima derivada de f tem a expressão

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{4}-(n-1)\right) x^{\frac{1}{4}-n}.$$

   (b) **[1,0 val.]** Escreva a fórmula de Taylor, com resto de Lagrange de ordem n, para a função f em torno do ponto $a = 1$.

FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Exame de Época de Recurso — 21 de Junho de 2013

7. Calcule os seguintes integrais:

   (a) **[1,5 val.]** $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

   (b) **[1,5 val.]** $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)dx;$

   (c) **[2,0 val.]** $\displaystyle\int_2^3 \frac{3x+1}{x^3-2x^2+x}dx.$

8. **[2,0 val.]** Calcule a área do domínio definido no 1º Quadrante e limitado pelas curvas $y = 3 - x^2$ e $y = x^2 - 4x + 3$.

9. **[1,0 val.]** Estude a natureza do integral,

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}dx.$$

10. **[1,5 val.]** Seja $a \in \mathbb{R}$. Determine a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, diferenciável, que satisfaz

$$x\,f(x) = a\,x + \int_1^x f(t)\,dt.$$

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\frac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^\mu$ $\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\,\mathrm{sen}(t)$ ou $x = a\,\cos(t)$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec(t)$ ou $x = a\,\mathrm{cosec}(t)$
$f(x) = R(\mathrm{sen}(x), \cos(x))$	$\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$