Resolução do Segundo Teste de Análise Matemática I E (21/11/2012)

Nota: Esta é apenas uma proposta de resolução de entre muitas outras possíveis.

1 a) Para $x \geq 0$ a função está sempre bem definida. Para $x < 0$ é necessário que $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$. Logo o domínio da função será $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) Para $x > 0$ a função é contínua pois é definida pelo produto de duas funções contínuas (um polinómio e a composta de duas funções contínuas - a exponencial e um polinómio).

Para $x < 0 \wedge x \neq -2$ a função é contínua pois é definida por uma função racional.

Para $x = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} -x^2 e^{1-x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{0}{-4} = 0$$

Como os dois limites anteriores são iguais, podemos concluir que a função é contínua para $x = 0$. Assim,

f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

c) Para $x > 0$ a função é diferenciável pois é definida pelo produto de duas funções diferenciáveis (um polinómio e a composta de duas funções diferenciáveis - a exponencial e um polinómio).

Para $x < 0 \wedge x \neq -2$ a função é diferenciável pois é definida por uma função racional.

Para $x = 0$

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2 e^{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} -x e^{1-x} = 0$$

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x^2}{x^2-4}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x^2-4} = 0$$

Como $f'_d(0) = f'_e(0) = 0$, f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$

$\therefore$ f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Determinemos a expressão da sua função derivada.

Para $x > 0$

$$f'(x) = (-x^2 e^{1-x})' = -2x e^{1-x} + x^2 e^{1-x} = e^{1-x}(x^2 - 2x)$$

Para $x < 0 \wedge x \neq -2$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)' = \frac{(x^2-4)2x - x^2 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 8x - \cancel{2x^3}}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

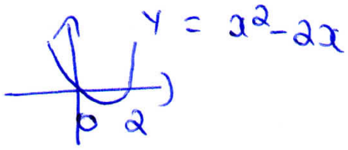
Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} e^{1-x}(x^2-2x) & , \text{ se } x>0 \\ 0 & , \text{ se } x=0 \\ -\dfrac{8x}{(x^2-4)^2} & , \text{ se } x<0 \wedge x \neq -2 \end{cases}$$

d) Começamos por analisar o sinal da primeira derivada de f. Para tal, começamos por determinar os seus zeros.

Para $x>0$

$$e^{1-x}(x^2-2x)=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$$



Para $x<0 \wedge x \neq -2$

$$-\frac{8x}{(x^2-4)^2}=0 \Leftrightarrow -8x=0 \Leftrightarrow x=0$$

		-2		0		2	
$e^{1-x}(x^2-2x)$					$-$	0	$+$
$-\frac{8x}{(x^2-4)^2}$	$+$		$+$				
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗		↘		↗

Máximo relativo Mínimo relativo

Assim,

f é crescente em $]-\infty,-2[$, em $]-2,0[$ e em $]2,+\infty[$

f é decrescente em $]0,2[$

f tem um máximo relativo em $x=0$ e um mínimo relativo em $x=2$.

e)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^2 e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{e^{x-1}} = 0$$, atendendo às velocidades de crescimento da exponencial e dos polinómios

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-\frac{4}{x^2}} = 1$$

(2) Para analisar os pontos de inflexão e o sentido das concavidades de g temos de analisar o sinal da sua segunda derivada nos pontos do domínio de g onde esta esteja definida. Começamos por determinar o domínio de g:

$$\frac{|x^2-2|}{1+x^2} > 0 \Leftrightarrow |x^2-2| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$$

Atendendo a que $\cotg x$ está definido para todos os valores reais, concluímos que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Como g' é definida por

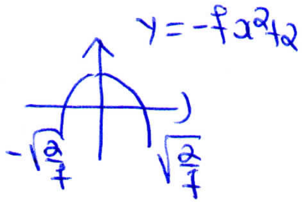
$$g'(x) = \text{arctg}\, x + \frac{x}{x^2-2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

temos para $x \neq \pm\sqrt{2}$

$$g''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2-2-2x\,x}{(x^2-2)^2} = \frac{(x^2-2)^2 + (1+x^2)(-x^2-2)}{(1+x^2)(x^2-2)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x^4} - 4x^2 + 4 - x^2 - \cancel{x^4} - 2 - 2x^2}{(1+x^2)(x^2-2)^2} = \frac{-7x^2+2}{(1+x^2)(x^2-2)^2}$$

$$\frac{-7x^2+2}{(1+x^2)(x^2-2)^2} = 0 \Leftrightarrow -7x^2+2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{7}}$$



		$-\sqrt{2}$		$-\sqrt{2/7}$		$\sqrt{2/7}$		$\sqrt{2}$	
$g''(x)$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$
$g(x)$	$\cap$		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cap$
				PI		PI			

g tem a concavidade voltada para baixo em

$]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{2}{7}}[\cup]\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

g tem a concavidade voltada para cima em

$]-\sqrt{\frac{2}{7}}, \sqrt{\frac{2}{7}}[$

g tem pontos de inflexão em $x = -\sqrt{2/7}$ e $x = \sqrt{2/7}$.

③

O $\lim_{x\to \pi/4} [\operatorname{sen}(2x)]^{\frac{1}{x-\pi/4}}$ conduz a uma indeterminação do tipo 1^∞. Assim:

$$\lim_{x\to \pi/4} [\operatorname{sen}(2x)]^{\frac{1}{x-\pi/4}} = \lim_{x\to \pi/4} e^{\log\left[[\operatorname{sen}(2x)]^{1/x-\pi/4}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to \pi/4} e^{\frac{\log(\operatorname{sen}(2x))}{x-\pi/4}} = e^{\lim_{x\to\pi/4} \frac{\log(\operatorname{sen}(2x))}{x-\pi/4}}$$

↳ porque a função exponencial é contínua

Calculemos agora

$\lim_{x\to \pi/4} \frac{\log(\operatorname{sen}(2x))}{x-\pi/4}$ que nos conduz a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Atendendo a que a função $\log(\operatorname{sen}(2x))$ é diferenciável numa vizinhança suficientemente pequena em torno de $x = \pi/4$, o limite anterior corresponde justamente à derivada desta função em $x = \pi/4$. Assim:

$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{\log(\operatorname{sen}(2x))}{x-\pi/4} = \lim_{x\to \pi/4} \frac{\log(\operatorname{sen}(2x)) - \log(\operatorname{sen}(2\pi/4))}{x-\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}(2\frac{\pi}{4})} \times \cos(2\tfrac{\pi}{4})\, 2 = 0$$

Logo $\lim_{x\to \pi/4} [\operatorname{sen}(2x)]^{\frac{1}{x-\pi/4}} = e^0 = 1$

a) Atendendo a que $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^+)$ podemos escrever uma fórmula de Taylor de qualquer ordem em torno de qualquer ponto de $\mathbb{R}^+$. Para o caso:

$$f(x) = f(1) + (x-1) f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{6} f'''(1) + \frac{(x-1)^4}{24} f^{IV}(c),$$

com c entre 1 e x

$f(1) = \log 1 = 0$

$f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \log x + x$ $\quad f'(1) = 2 \log 1 + 1 = 1$

$f''(x) = 2 \log x + 2x \frac{1}{x} + 1 = 2 \log x + 3$ $\quad f''(1) = 2 \log 1 + 3 = 3$

$f'''(x) = \frac{2}{x}$ $\quad f'''(1) = 2$

$f^{IV}(x) = -\frac{2}{x^2}$

Assim,

$$x^2 \log x = x-1 + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{24}\left(-\frac{2}{c^2}\right), \text{ com } c \text{ entre } 1 \text{ e } x$$

b) Pela alínea anterior,

$$f(x) \leq x-1 + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{24}\left(-\frac{2}{c^2}\right) \leq x-1 + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^4}{24}\left(-\frac{2}{c^2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^4 \geq 0$$ o que se verifica sempre pois $x-1$ está elevado a um expoente par.

(5) Como $f(x) = g(x) + mx$ temos que $g(x) = f(x) - mx$.

Sendo g contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$ e $g(a) = g(b)$, pelo Teorema de Rolle sabemos que

$$\exists c \in]a,b[: g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - m = 0 \Leftrightarrow f'(c) = m$$