

Primeiro Teste de
Análise Matemática I E

24 de Outubro de 2012

Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

Questão 1:

a) Começamos por elaborar um quadro que represente a variação de sinal da expressão $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$:

	1	2	3	
$x-1$	-	0	+	+
$(x-2)(x-3)$	+	+	0	-
$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$	-	0	+	-

ND ND

Assim

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]2, 3[$$

b)

A sucessão é definida por

$$1 + \frac{(-1)^m}{m} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{m}, & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ 1 + \frac{1}{m}, & \text{se } m \text{ é par} \end{cases}$$

bele que todos os termos correspondente a m ímpar pertencem ao conjunto A.

Assim,

$$A \cup B =]-\infty, 1[\cup]2, 3[\cup \left\{1 + \frac{1}{2^m} \mid m \in \mathbb{N}\right\}$$

Desta forma,

$$f_A(A \cup B) = \{1, 2, 3\} \cup \left\{1 + \frac{1}{2^m} \mid m \in \mathbb{N}\right\}.$$

e) Um conjunto diz-se aberto se for igual ao seu interior e fechado se for igual à sua aderência.

$$\text{int}(B \cup \{2\}) = \emptyset \neq B \cup \{2\} \text{ logo } B \cup \{2\} \text{ não é aberto}$$

$$f_A(B \cup \{2\}) = B \cup \{2, 1\}$$

$$\overline{B \cup \{2\}} = \text{int}(B \cup \{2\}) \cup f_A(B \cup \{2\}) = B \cup \{2, 1\} \neq B \cup \{2\} \text{ logo}$$

$B \cup \{2\}$ não é fechado

d) As afirmações i e ii são verdadeiras.

A afirmação iii é falsa. Para tal, basta considerar

$$X = [0, 1]. \text{ Temos } f_X(X) =]0, 1[\text{ e } X' = [0, 1].$$

$$\text{Logo } X' \cap f_X(X) =]0, 1[\neq \emptyset.$$

Questão 2

(3)

a)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-3}{4n+1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{4n} \right)^n}{\left(1 + \frac{1}{4n} \right)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 - \frac{3}{4n} \right)^{4n} \right]^{1/4}}{\left[\left(1 + \frac{1}{4n} \right)^{4n} \right]^{1/4}} = \frac{e^{-3/4}}{e^{1/4}} = e^{-1}\end{aligned}$$

b) Começamos por determinar

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2+1} - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0\end{aligned}$$

Logo a sucessão $\sqrt{n^2+1} - n$ é um infinitésimo.

Sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \cos^2(2n+1) \leq 1$, pelo que $\cos^2(2n+1)$ é uma sucessão limitada.

Como o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo, podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) \cos^2(2n+1) = 0.$$

c)

Começamos por enquadrar a sequência

$$\sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{\sqrt{m^2+k}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+m}} \times (m+1) \leq \sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{\sqrt{m^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{m^2+m}} (m+1), \forall m \in \mathbb{N}$$

Como

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{\sqrt{m^2+m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1+1/m}{\sqrt{1+\frac{2}{m}}} = 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{\sqrt{m^2+m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1+1/m}{\sqrt{1+1/m}} = 1$$

O Teorema das Sequências Enquadradas garante que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{\sqrt{m^2+k}} = 1.$$

Questão 3

a)

Começamos por mostrar que a proposição é verdadeira para o primeiro dos números naturais.

$$u_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} = 1 \leq 1 = 2 - \frac{1}{1}$$

Mostremos agora que se a proposição for verdadeira para um certo número natural m , também é verdadeira para o natural seguinte $(m+1)$.

Para tal definamos uma hipótese e uma tese.

Hipótese: $u_m \leq 2 - \frac{1}{m}$

Tese: $u_{m+1} \leq 2 - \frac{1}{m+1}$

Prova da tese:

$$u_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(m+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)^2}$$

↓
pela hipótese

Se $-\frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)^2} \leq -\frac{1}{m+1}$ então temos o resultado pretendido.

$$-\frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)^2} \leq -\frac{1}{m+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{m+1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-m^2 - 2m - 1 + m + m^2 + m}{m(m+1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{m(m+1)^2} \leq 0 \text{ que se}$$

verifica pois $m \in \mathbb{N}$.

Assim, pelo Princípio de Indução Matemática,

$$u_m \leq 2 - \frac{1}{m}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

b) Pela mesma maneira sabemos que

$$u_m \leq 2 - \frac{1}{m}, \forall m \in \mathbb{N}$$

Assim

$$0 \leq \sqrt[m]{\frac{u_m}{m!}} \leq \sqrt[m]{\frac{2 - \frac{1}{m}}{m!}}, \forall m \in \mathbb{N} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{m+1}}{(m+1)!} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{m+1}}{2 - \frac{1}{m}} \cdot \frac{m!}{(m+1)!} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{m+1}}{2 - \frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{m+1} = \\ &= \frac{2}{2} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Como

$$\frac{2 - \frac{1}{m}}{m!} > 0, \forall m \in \mathbb{N} \text{ podemos concluir que}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{2 - \frac{1}{m}}{m!}} = 0.$$

Atendendo a (*), o Teorema das Sucessões Enquadradas nos permite concluir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2}}{m!}} = 0.$$