FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Exame de Recurso — 21 de Janeiro de 2013

1. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{arcsen}(4 - x^2)}{x - 2}.$$

   (a) **[1.0 val.]** Mostre que o domínio de f é igual a $[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2[\cup]2, \sqrt{5}]$.

   (b) **[1.0 val.]** Determine o interior, a fronteira e o derivado do domínio de f.

2. **[1.0 val.]** Mostre, usando o Princípio de Indução Matemática, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n^2+n}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

3. Considere a sucessão definida por,

$$u_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (a) **[1.0 val.]** Justifique, detalhadamente, a afirmação "(u_n) é limitada".

   (b) **[1.0 val.]** Calcule o valor do seguinte limite:

$$\lim \left(\frac{2^n+1}{3^n+n} \cdot u_n\right).$$

4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\log x}, & \text{se } x > 0 \\ 2 + \dfrac{x}{x^2+1}, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

   (a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f e estude a sua continuidade.

   (b) **[2.0 val.]** Estude a diferenciabilidade e a monotonia de f e determine os extremos relativos da função.

   (c) **[1.5 val.]** Sabendo que

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - \log(x)}{x \log^3(x)}, & \text{se } x > 0,\ x \neq 1 \\ \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

   estude o sentido das concavidades e determine os pontos de inflexão de f.

5. **[2.0 val.]** Calcule, justificando, o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log(x)}{\operatorname{arctg}(x-1)}.$$

V. S. F. F.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

6. Considere a função $f(x) = e^{\sqrt{x}-1}$.

   (a) **[1.5 val.]** Escreva a fórmula da Taylor da função f, em torno do ponto $a = 1$, com resto de Lagrange de ordem 2.

   (b) **[1.0 val.]** Sendo
   $$F(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}-1}\, dt,$$
   determine o domínio de F e mostre, usando o teorema de Lagrange, que existe $c \in\,]0,1[$ tal que $F(1) = f(c)$.

7. (a) **[1.0 val.]** Calcule a família de primitivas da função
   $$f(x) = x^2\, e^x.$$

   (b) **[1.5 val.]** Determine o valor do seguinte integral
   $$\int_0^{16} \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x^5}+9\sqrt[4]{x^3}}\, dx.$$

8. **[2.0 val.]** Determine a área do domínio plano limitado pelas linhas de equação $y = 0$, $y = -x^2+2$ e $y = x^4$.

9. **[2.0 val.]** Estude a natureza do integral
   $$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}\,(x^3-3)}\, dx.$$

Expressão	Substituição
$f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$	$x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$	$\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^\mu$ $\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\,\text{sen}(t)$ ou $x = a\,\cos(t)$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec(t)$ ou $x = a\,\text{cosec}(t)$
$f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$	$\text{tg}(\frac{x}{2}) = t$
$f(x) = R(e^x)$	$e^x = t$