

# Análise Matemática I D - 2º Teste 3/6/2011

**Nota:** Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.

1. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right), & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{arctg} x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Determine o domínio de  $f$ .
- (b) Estude a continuidade de  $f$ .
- (c) Defina  $f'$ , a função derivada de  $f$ .
- (d) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , indicando as equações das assíntotas horizontais ao gráfico da função.

*Resposta:*

- (a) É necessário estudar o domínio de cada expressão designatória que define a função:
  - se  $x > 0$ , o valor de  $f(x)$  é calculado como  $2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right)$ , que está definido desde que  $x \neq 0$ . Logo está bem definido para todo  $x > 0$ ;
  - se  $x \leq 0$ ,  $f(x)$  calcula-se como  $\operatorname{arctg} x$  que está definido para todo o número real. Logo está definido para  $x \leq 0$ .

Desta forma conclui-se que o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}$ .

- (b)
  - Para  $x < 0$ , a função  $f(x)$  é definida por uma função trigonométrica inversa, que sabemos ser contínua.
  - Para  $x > 0$ , a função  $f(x)$  define-se como:
    - o quociente de duas funções contínuas (polinomiais), que é uma função contínua no domínio onde esteja definido;
    - a composição desse quociente com uma função contínua (trigonométrica), resultando numa função também contínua no domínio onde esteja definida;
    - o produto dessa composição por uma função contínua (polinomial), que resulta numa função contínua no domínio onde esteja definida.

Assim, concluímos que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^+$ .

Falta analisar a continuidade em  $x = 0$ . Atendendo a que o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo, podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

Como

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} x = 0$$

concluímos que  $f$  é contínua em  $x = 0$ . Logo  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

- (c) • Para  $x < 0$ ,  $f$  está definida por uma função trigonométrica inversa, que sabemos ser diferenciável com derivada  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ;
- Para  $x > 0$ ,  $f$  está definida como
- o quociente de duas funções diferenciáveis (polinomiais), que é uma função diferenciável no domínio onde esteja definido;
  - a composição desse quociente com uma função diferenciável (trigonométrica), resultando numa função também diferenciável no domínio onde esteja definida;
  - o produto dessa composição por uma função diferenciável (polinomial), que resulta numa função diferenciável no domínio onde esteja definida.

Assim  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^+$  com derivada  $f'(x) = (2x^2 \operatorname{sen}(\frac{2}{x}))' = 4x \operatorname{sen}(\frac{2}{x}) + 2x^2 (\operatorname{sen}(\frac{2}{x}))' = 4x \operatorname{sen}(\frac{2}{x}) - 4 \cos(\frac{2}{x})$ .

Falta analisar a diferenciabilidade em  $x = 0$ . Começemos por determinar a derivada à esquerda no ponto  $x = 0$ :

$$f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{1}{1+0^2} = 1.$$

No caso da derivada à direita, novamente atendendo a que o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo, vem

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 \operatorname{sen}(\frac{2}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

Como os dois limites anteriores apresentam valores distintos, podemos concluir que  $f$  não é diferenciável em  $x = 0$ .

Assim sendo,  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , com derivada  $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f'(x) = \begin{cases} 4x \operatorname{sen}(\frac{2}{x}) - 4 \cos(\frac{2}{x}), & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- (d) Começemos por determinar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right)$$

que conduz a uma indeterminação do tipo  $\infty \times 0$ . Fazendo a mudança de variável  $y = \frac{2}{x}$ , obtém-se que  $x \rightarrow +\infty$  se e só se  $y \rightarrow 0^+$  e portanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{8 \operatorname{sen} y}{y} = +\infty$$

O valor do último limite resulta de  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$  e  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{8}{y} = +\infty$ . Desta forma, não existe assíntota horizontal à direita.

Calculando agora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

concluimos que existe uma assíntota horizontal à esquerda de equação  $y = -\frac{\pi}{2}$ .

2. Considere a sucessão convergente:

$$u_n = \left( \frac{n^2}{n^2 + 2} \right)^{n^2 - 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Calcule o limite de  $(u_n)$ .

Sejam  $(a_n)$  e  $(b_n)$  duas subsucessões de  $(u_n)$ .

(b) Qual é o valor de  $\lim(a_n - b_n)$ ?

(c) Sendo  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $v_n = q(a_n + b_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , calcule  $\lim v_n$ . Diga, justificando, se  $(v_n)$  é limitada.

*Resposta:*

(a) No cálculo do limite pedido encontramos uma indeterminação do tipo  $1^\infty$ . Contudo,

$$\lim \left( \frac{n^2}{n^2 + 2} \right)^{n^2 - 1} = \lim \left( \frac{1}{1 + \frac{2}{n^2}} \right)^{n^2 - 1} = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) = \frac{1}{e^2}.$$

(b) Sabemos que  $(u_n)$  é uma sucessão convergente. Sendo  $(a_n)$  e  $(b_n)$  subsucessões de  $(u_n)$ , podemos concluir que são ambas sucessões convergentes, com limite igual ao de  $(u_n)$ . Então  $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = \lim u_n - \lim u_n = 0$ .

(c) Como  $q$  é uma função contínua temos que  $\lim v_n = \lim q(a_n + b_n) = q(\lim(a_n + b_n)) = q(\lim a_n + \lim b_n)$ . Tal como na alínea (b), sendo  $(a_n)$  e  $(b_n)$  duas subsucessões de  $(u_n)$ , sabemos que  $\lim a_n = \lim b_n = \lim u_n = e^{-2}$ . Assim,  $\lim v_n = q(\lim a_n + \lim b_n) = q(e^{-2} + e^{-2}) = q(2e^{-2})$ .

3. Considere  $b \in \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 - x + b, & \text{se } x < 0 \\ 3x^3 - 2x^2 + x + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Para que valores de  $b$  a função é contínua em todo o seu domínio?

(b) Para que valores de  $b$  a função tem um mínimo absoluto? Qual o seu valor?  
Sugestão: Comece por analisar a monotonia da função.

(c) Considerando  $b < 0$ , justifique que  $g$  admite um único zero.

*Resposta:*

(a) Para  $x < 0$  e  $x > 0$  a função é contínua, uma vez que é definida à custa de duas funções polinomiais, ambas contínuas em  $\mathbb{R}$ . A função  $g$  será contínua em  $x = 0$  se e só se

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x).$$

Atendendo a que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^3 - 2x^2 + x + 1 = 1 = g(0)$  e a que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^3 - x + b = b$  temos que  $g$  será contínua em  $x = 0$ , e consequentemente em todo o seu domínio, se e só se  $b = 1$ .

(b) Seguindo a sugestão dada, comecemos por determinar a função derivada de  $g$  em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Temos que

$$g'(x) = \begin{cases} -3x^2 - 1, & \text{se } x < 0 \\ 9x^2 - 4x + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Ambos os polinómios que definem a função derivada de  $g$  não apresentam zeros, pelo que a função derivada será negativa, se  $x < 0$  e positiva se  $x > 0$ . Consequentemente, a função  $g$  será decrescente se  $x < 0$  e crescente se  $x > 0$ . Atendendo ao valor dos limites laterais da função em  $x = 0$  e ao valor de  $g(0)$ , podemos concluir que se  $b < 1$  então a função não terá nenhum mínimo local em  $x = 0$ . Se  $b \geq 1$ , então  $x = 0$  é mínimo local de  $g$ , podendo ainda concluir-se, atendendo à monotonia da função, que é um mínimo global.

- (c) Supondo que  $b < 0$ , atendendo à continuidade da função para  $x < 0$  podemos concluir que existe  $\epsilon < 0$  tal que  $g(\epsilon) < 0$ . Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ , novamente atendendo à continuidade da função para  $x < 0$ , podemos concluir que existe  $\beta < \epsilon < 0$  tal que  $g(\beta) > 0$ . A função  $g$  é contínua em  $[\beta, \epsilon]$  logo o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero para  $g$  em  $]\beta, \epsilon[$ . Como  $g$  é estritamente decrescente em  $]-\infty, 0[$  o zero será único. Em  $[0, +\infty[$ , atendendo a que  $g(0) = 1$  e a que a função é monótona crescente, podemos concluir que não existe nenhum zero.

4. Considere a função definida em  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$  por:

$$h(x) = \frac{x}{x+3}.$$

- (a) Determine a fórmula de Taylor para  $h$ , com resto de Lagrange de ordem 3, centrada no ponto 2.
- (b) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - (3x+4)\frac{1}{25}}{(x-2)^2}.$$

- (c) Mostre que para qualquer ponto do intervalo  $[2, \frac{5}{2}]$ , cometemos um erro inferior a  $10^{-2}$  ao utilizar os três primeiros termos do desenvolvimento em fórmula de Taylor da alínea (a) para aproximar o valor da função no ponto considerado.

Resposta:

- (a) Atendendo a que a função é de classe  $\mathcal{C}^3(\mathbb{R} \setminus \{-3\})$ , podemos escrever a Fórmula de Taylor pretendida. Determinemos  $h(2), h'(2), h''(2)$  e  $h'''(c)$ . Temos

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x}{x+3} & \Rightarrow & h(2) = \frac{2}{5} \\ h'(x) &= \frac{(x+3)-x}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2} & \Rightarrow & h'(2) = \frac{3}{25} \\ h''(x) &= 3 \cdot (-2)(x+3)^{-3} = \frac{-6}{(x+3)^3} & \Rightarrow & h''(2) = -\frac{6}{125} \\ h'''(x) &= (-6) \cdot (-3)(x+3)^{-4} = \frac{18}{(x+3)^4} & \Rightarrow & h'''(c) = \frac{18}{(c+3)^4}. \end{aligned}$$

Então a fórmula de Taylor de  $h$ , com resto de Lagrange de ordem 3, em torno do ponto 2 é dada por:

$$\begin{aligned} h(x) &= h(2) + h'(2)(x-2) + \frac{h''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{h'''(c)}{3!}(x-2)^3 \\ &= \frac{2}{5} + \frac{3}{25}(x-2) - \frac{3}{125}(x-2)^2 + \frac{3}{(c+3)^4}(x-2)^3 \end{aligned}$$

onde  $c$  está entre  $x$  e 2.

- (b) No cálculo deste limite deparamos-nos com uma indeterminação do tipo 0/0. Consideremos a fórmula de Taylor para  $h(x)$  determinada na alínea anterior. Temos então que:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - (3x + 4)\frac{1}{25}}{(x - 2)^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{25}(x - 2) - \frac{3}{125}(x - 2)^2 + \frac{3}{(c+3)^4}(x - 2)^3 - \frac{3}{25}x - \frac{4}{25}}{(x - 2)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{3}{125}(x - 2)^2 + \frac{3}{(c+3)^4}(x - 2)^3}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{3}{125} + \frac{3}{(c + 3)^4}(x - 2) \\
&= -\frac{3}{125} + \frac{3}{(2 + 3)^4}(2 - 2) = -\frac{3}{125}
\end{aligned}$$

tendo em conta que  $c \rightarrow 2$  quando  $x \rightarrow 2$ .

- (c) Ao utilizar os três primeiros termos do desenvolvimento em fórmula de Taylor para aproximar o valor da função  $h$  num dado ponto estamos a desprezar o resto de Lagrange de ordem três, que corresponde ao erro cometido na aproximação.

O referido resto é dado por  $R_3(x) = \frac{3}{(c+3)^4}(x - 2)^3$ . Pretendemos então majorar  $|R_3(x)|$  no intervalo  $[2, \frac{5}{2}]$ , para assim estimar o erro cometido. Tem-se, para  $x \in [2, \frac{5}{2}]$ ,

$$|R_3(x)| = \frac{3}{(c + 3)^4}(x - 2)^3 < \frac{3}{(2 + 3)^4} \left( \frac{5}{2} - 2 \right)^3 = \frac{3}{8 \times 5^4} < \frac{1}{25^2} < \frac{1}{10^2}.$$

A primeira desigualdade resulta de que para determinarmos um majorante para um produto de duas funções não negativas podemos majorar cada um dos factores. Ora dado que, nos intervalos considerados, o primeiro factor é uma função decrescente e o segundo é uma função crescente, para obter um majorante substituímos  $x$  por  $\frac{5}{2}$  e  $c$  por 2, dado que  $x \in [2, \frac{5}{2}]$ , e  $c \in ]2, \frac{5}{2}[$ .