

Análise Matemática I (B, C, D e E)

2º Teste — 3 de Junho de 2011

1. (6 val.) Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right), & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{arctg} x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Determine o domínio de f .
 - (b) Estude a continuidade de f .
 - (c) Defina f' , a função derivada de f .
 - (d) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, indicando as equações das assíntotas horizontais ao gráfico da função.
2. (3 val.) Considere a sucessão convergente:

$$u_n = \left(\frac{n^2}{n^2 + 2} \right)^{n^2 - 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Calcule o limite de (u_n) .
- Sejam (a_n) e (b_n) duas subsucessões de (u_n) .
- (b) Qual é o valor de $\lim(a_n - b_n)$?
 - (c) Sendo $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $v_n = q(a_n + b_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, calcule $\lim v_n$. Diga, justificando, se (v_n) é limitada.
3. (5 val.) Considere $b \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 - x + b, & \text{se } x < 0 \\ 3x^3 - 2x^2 + x + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Para que valores de b a função é contínua em todo o seu domínio?
 - (b) Para que valores de b a função tem um mínimo absoluto? Qual o seu valor?
Sugestão: Comece por analisar a monotonia da função.
 - (c) Considerando $b < 0$, justifique que g admite um único zero.
4. (6 val.) Considere a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ por:

$$h(x) = \frac{x}{x+3}.$$

- (a) Determine a fórmula de Taylor para h , com resto de Lagrange de ordem 3, centrada no ponto 2.
- (b) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - (3x+4)^{\frac{1}{25}}}{(x-2)^2}.$$
- (c) Mostre que para qualquer ponto do intervalo $[2, \frac{5}{2}]$, cometemos um erro inferior a 10^{-2} ao utilizar os três primeiros termos do desenvolvimento em fórmula de Taylor da alínea (a) para aproximar o valor da função no ponto considerado.