Análise Matemática I D - 1º Teste
15/4/2011

Nota: Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.

1.

Determine o valor do integral:

$$\int_1^e \frac{\sin(\log(x))}{x} dx.$$

Resposta: Determinemos em primeiro lugar D, o domínio da função integranda. Dado que esta função é definida à custa de $\log(x)$, teremos de ter $x > 0$. Como é definida por uma fracção cujo denominador é x, vem que $x \neq 0$. Daqui resulta que $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Assim sendo, o intervalo de integração $[1, e]$ está contido no domínio D e portanto o integral pedido é um integral de Riemann.

Com vista à utiização da Regra de Barrow para o cálculo do valor do integral, determinemos uma primitiva de $\frac{\text{sen}(\log(x))}{x}$. Temos

$$\int \frac{\sin(\log(x))}{x} dx = \int \sin(\log(x)) \frac{1}{x} dx = -\cos(\log(x)).$$

Assim,

$$\int_1^e \frac{\sin(\log(x))}{x} dx = [-\cos(\log(x))]_1^e = -\cos(\log(e)) + \cos(\log(1)) = -\cos(1) + 1.$$

2.

a) Considere $t = \sqrt{\cos(x)}$. Mostre que $\sin(x) = \sqrt{1 - t^4}$.

Resposta: Da mudança de variável $t = \sqrt{\cos(x)}$ resulta $\cos x = t^2$, donde $x = \arccos(t^2)$ será um ângulo do intervalo $[0, \pi]$ (considerando a restrição principal da função coseno). Pela fórmula fundamental da trigonometria sabemos que

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

donde resulta:

$$t^4 + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm\sqrt{1-t^4}.$$

Dado que x pertence ao intervalo $[0, \pi]$, podemos concluir que o seu seno tomará um valor positivo, pelo que $\sin x = \sqrt{1-t^4}$.

b) Utilizando a substituição $t = \sqrt{\cos(x)}$, determine a família de primitivas da função

$$f(x) = \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}.$$

Resposta: Utilizando o método de primitivação por substituição e considerando $t = \sqrt{\cos(x)}$, temos:

$$\int \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx = \int \frac{(\sqrt{1-t^4})^3}{t}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}2t\right)dt =$$

$$= \int -2(1-t^4)dt = -2t + \frac{2}{5}t^5 + c = -2\sqrt{\cos(x)} + \frac{2}{5}(\sqrt{\cos(x)})^5 + c,$$

com c uma constante real.

3.

a) Mostre que $\lim_{x\to 0^+} x\log^n(x) = 0$, sendo n um número natural. Utilize, por exemplo, a mudança de variável $y = -\log x$.

Resposta: Se considerarmos a mudança de variável sugerida, obtemos $x = e^{-y}$. Daqui resulta que $x \to 0^+$ se, e só, se $y \to +\infty$. Então,

$$\lim_{x\to 0^+} x\log^n(x) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}(-y)^n = \lim_{y\to+\infty} (-1)^n \frac{y^n}{e^y} = (-1)^n \lim_{y\to+\infty} \frac{y^n}{e^y}.$$

Da relação entre as velocidades de crescimento da função exponencial, e^y e da função polinomial, y^n, sabemos que $\lim_{y\to+\infty} \frac{y^n}{e^y} = 0$, logo $\lim_{x\to 0^+} x\log^n(x) = 0$.

b) Calcule, caso existam, o valor dos integrais $\int_0^1 \log(x)dx$ e $\int_0^1 \log^2(x)dx$.

Resposta: Os dois integrais são integrais impróprios de 2ª espécie, porque o domínio de integração é um intervalo limitado mas as funções integrandas não são limitadas nos domínios de integração considerados. Recorrendo à definição de integral impróprio e ao método de integração por partes obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log(x)dx &= \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \log(t)dt = \lim_{x\to 0^+}\left([t\log(t)]_x^1 - \int_x^1 t\frac{1}{t}dt\right) = \\
&= \lim_{x\to 0^+}\left(\log(1) - x\log(x) - \int_x^1 1dt\right) = \\
&= \lim_{x\to 0^+}\left(-x\log(x) - [t]_x^1\right) = \\
&= \lim_{x\to 0^+}(-x\log(x) - 1 + x) = \\
&= -\lim_{x\to 0^+}(x\log(x)) + \lim_{x\to 0^+}(-1+x)
\end{aligned}$$

Pela alínea anterior, sabemos que $\lim_{x\to 0^+}(x\log(x)) = 0$. Assim, podemos concluir que $\int_0^1 \log(x)dx = -1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log^2(x)dx &= \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \log^2(t)dt = \lim_{x\to 0^+}\left([t\log^2(t)]_x^1 - \int_x^1 t2\log(t)\frac{1}{t}dt\right) = \\
&= \lim_{x\to 0^+}\left(\log^2(1) - x\log^2(x) - \int_x^1 2\log(t)dt\right) = \\
&= \lim_{x\to 0^+}\left(-x\log^2(x) - 2\int_x^1 \log(t)dt\right) = \\
&= -\lim_{x\to 0^+}(x\log^2(x)) - 2\lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^1 \log(t)dt\right)
\end{aligned}$$

Atendendo à alínea (a) e ao cálculo do integral anterior, concluímos que

$$\int_0^1 \log^2(x)dx = 2.$$

c) Utilizando o Princípio de Indução Matemática, prove que:

$$\int_0^1 \log^n(x)dx = (-1)^n\, n!,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta: Analogamente à alínea (a), o integral $\int_0^1 \log^n(x)dx$ é um integral impróprio de 2^{a} espécie para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

- Se $n = 1$, pela alínea anterior sabemos que $\int_0^1 \log(x)dx = -1$ e $(-1)^1 1! = -1$. Então a proposição é verdadeira para $n = 1$.

  Para $n > 1$ arbitrário e fixo, consideremos:

- Hipótese de indução: $\int_0^1 \log^n(x)dx = (-1)^n \; n!$
- Tese de indução: $\int_0^1 \log^{n+1}(x)dx = (-1)^{n+1} \; (n+1)!$
- Prova da tese de indução:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log^{n+1}(x)dx &= \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \log^{n+1}(t)dt = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left([t\log^{n+1}(t)]_x^1 - \int_x^1 t(n+1)\log^n(t)\frac{1}{t}dt \right) = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(\log^{n+1}(1) - x\log^{n+1}(x) - \int_x^1 (n+1)\log^n(t)dt \right) = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(-x\log^{n+1}(x) - (n+1)\int_x^1 \log^n(t)dt \right) = \\
&= -\lim_{x\to 0^+} (x\log^{n+1}(x)) - (n+1)\lim_{x\to 0^+} \left(\int_x^1 \log^n(t)dt \right) = \\
&= -\lim_{x\to 0^+} (x\log^{n+1}(x)) - (n+1)\int_0^1 \log^n(x)dx
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, sabemos que $\int_0^1 \log^n(x)dx = (-1)^n \; n!$.
Pela alínea (a) temos que $\lim_{x\to 0^+} (x\log^{n+1}(x)) = 0$. Então:

$$\int_0^1 \log^{n+1}(x)dx = 0 - (n+1)(-1)^n \; n! = (-1)^{n+1} \; (n+1)!.$$

Desta forma, o Princípio de Indução Matemática garante que

$$\int_0^1 \log^n(x)dx = (-1)^n \; n!, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Considere a sucessão definida por $u_n = \frac{n^2}{5n^3} + \frac{n^2}{5n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{5n^3+2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{5n^3+2k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (a) Indique, sem simplificar os cálculos, quais os termos de ordem 1, 2 e 3 de (u_n).

   Resposta:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{k=0}^{1} \frac{1^2}{5\times 1^3 + 2k} = \frac{1^2}{5\times 1^3 + 2\times 0} + \frac{1^2}{5\times 1^3 + 2\times 1} \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \sum_{k=0}^{2} \frac{2^2}{5\times 2^3+2k} \\
&= \frac{2^2}{5\times 2^3+2\times 0} + \frac{2^2}{5\times 2^3+2\times 1} + \frac{2^2}{5\times 2^3+2\times 2} \\
&= \frac{4}{40} + \frac{4}{42} + \frac{4}{44} \\
u_3 &= \sum_{k=0}^{3} \frac{3^2}{5\times 3^3+2k} \\
&= \frac{3^2}{5\times 3^3+2\times 0} + \frac{3^2}{5\times 3^3+2\times 1} + \frac{3^2}{5\times 3^3+2\times 2} \\
&\quad + \frac{3^2}{5\times 3^3+2\times 3} \\
&= \frac{9}{135} + \frac{9}{137} + \frac{9}{139} + \frac{9}{141}
\end{aligned}
$$

(b) Prove que (u_n) é limitada.

Resposta: Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ e k, inteiro entre 0 e n, a fracção $\frac{n^2}{5n^3+2k}$ é positiva. Consequentemente, também

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{5n^3+2k} > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, para valores de k inteiros entre 0 e n, $\frac{n^2}{5n^3+2k} \leq \frac{n^2}{5n^3}$, donde

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{5n^3+2k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{5n^3} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5n} = (n+1)\frac{1}{5n},$$

justificando-se a última igualdade pelo facto de estarmos a somar $(n+1)$ parcelas independentes de k. Como $\frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, obtém-se

$$u_n \leq (n+1)\frac{1}{5n} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{2}{5}.$$

Conclui-se assim que $0 < u_n \leq \frac{2}{5}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, pelo que (u_n) é limitada.

Nota: Uma alternativa a esta resolução seria invocar a convergência de (u_n) (ver a alínea seguinte) e o facto de que toda a sucessão convergente é limitada.

(c) Calcule o limite de (u_n).

Resposta: Na alínea anterior verificou-se que

$$u_n \leq \frac{n+1}{5n}.$$

Por outro lado, para valores de k inteiros entre 0 e n, também se tem $\frac{n^2}{5n^3+2k} \geq \frac{n^2}{5n^3+2n}$ e

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{5n^3+2k} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{5n^3+2n} = (n+1)\frac{n^2}{5n^3+2n},$$

justificando-se a última igualdade pelo facto de estarmos a somar $(n+1)$ parcelas independentes de k.
Logo,

$$\frac{n^3+n^2}{5n^3+2n} \leq u_n \leq \frac{n+1}{5n},$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.
Como,

$$\lim \frac{n^3+n^2}{5n^3+2n} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \lim \frac{n+1}{5n} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{5} = \frac{1}{5},$$

o Teorema das Sucessões Enquadradas garante que (u_n) é convergente para $\frac{1}{5}$.

5.

Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}dx.$$

Resposta: Comecemos por determinar D, o domínio da função integranda. Temos

$$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-2.$$

Assim

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2-x-6>0\} =]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[,$$

tendo em conta que o gráfico de x^2-x-6 é uma parábola que tem a concavidade voltada para cima e portanto toma valores positivos fora dos zeros, que como vimos atrás são em $x=3$ e $x=-2$.

Atendendo a que o domínio de integração de $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}dx$ é ilimitado, podemos concluir que o integral considerado é um integral misto. Será então conveniente reescrever o integral sob a forma:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}dx = \int_3^{4} \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}dx + \int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}dx,$$

em que no segundo membro temos, respectivamente, um integral impróprio de segunda espécie e um integral impróprio de primeira espécie.

O integral impróprio do primeiro membro da igualdade será convergente se, e só se, ambos os integrais impróprios do segundo membro forem convergentes.

Para estudar a natureza do integral de primeira espécie observemos que $\frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}$ tem o mesmo tipo de crescimento que $\frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$, quando x tende para $+\infty$.

Atendendo a que a função integranda é não negativa no domínio de integração, comparemos o referido integral impróprio com o integral $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, com $\alpha = 1 \leq 1$, que é portanto divergente.

Como o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2-x-6}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}} = 1,$$

é finito e não nulo, os dois integrais impróprios têm a mesma natureza, pelo que o integral impróprio inicial, de primeira espécie, é divergente. Assim o integral misto também será divergente.

6. Calcule o valor da área do domínio limitado pelos gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^3 - 2x + 1$.

Resposta: Comecemos por determinar as intersecções dos gráficos das duas funções resolvendo a equação $x^2 + 1 = x^3 - 2x + 1$ que é equivalente a $x^3 - x^2 - 2x = 0$. Factorizando-se o primeiro membro obtem-se $x(x-2)(x+1) = 0$, donde resultam as soluções $x = -1$, $x = 0$ e $x = 2$. Estas são as abcissas dos pontos onde os gráficos de f e g se intersectam.

Entre intersecções consecutivas, a posição relativa dos gráficos de f e g mantém-se constante (caso contrário, as intersecções não seriam consecutivas). Por outro lado, para valores de x superiores a 2 ou inferiores a -1, os gráficos não voltam a intersectar-se pelo que não definem domínios limitados.

Desta forma a área pretendida será dada por

$$\int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{0}^{2} |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Resta saber qual o sinal de $f(x) - g(x)$ em cada um dos intervalos considerados, para que se possa simplificar $|f(x) - g(x)|$. Para tal, pode recorrer-se

- ao esboço dos gráficos das funções;

- ao cálculo do valor das funções f e g num ponto interior a cada um dos domínios de integração;
- ao simples facto de os integrais $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ e $\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$ serem simétricos. Como um deles corresponderá ao valor pretendido, mesmo que se calcule o outro (que terá um valor negativo) bastará considerar o valor simétrico.

Para o integral em $[0,2]$, calcule-se o valor das funções em $x = 1$, ponto interior do domínio de integração. Como $f(1) = 2$ e $g(1) = 0$, conclui-se que no intervalo $]0,2[$ a função f é superior à g e portanto

$$\begin{aligned}
\int_0^2 |f(x) - g(x)|\,dx &= \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx \\
&= \int_0^2 [(x^2 + 1) - (x^3 - 2x + 1)]\,dx \\
&= \int_0^2 (x^2 - x^3 + 2x)\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{4} + 4 = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Para o integral em $[-1,0]$, calcule-se, por exemplo, directamente o valor do integral

$$\int_{-1}^0 f(x)-g(x)\,dx = \int_{-1}^0 (x^2-x^3+2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2\right]_{-1}^0 = -\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{4} + 1\right) = -\frac{5}{12}$$

Como este valor é negativo, concluímos que $\int_{-1}^0 |f(x) - g(x)|\,dx = \frac{5}{12}$. (Conclui-se ainda que no intervalo $]-1,0[$ o gráfico da função g encontra-se acima do gráfico da função f).

O valor da área correspondente ao domínio indicado será igual a $\frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$.