

Análise Matemática I (B, C, D e E)

1º Teste — 15 de Abril de 2011

1. (2 val.) Determine o valor do integral:

$$\int_1^e \frac{\sin(\log(x))}{x} dx.$$

2. (4 val.)

- a) Considere $t = \sqrt{\cos(x)}$. Mostre que $\sin(x) = \sqrt{1 - t^4}$.
b) Utilizando a substituição $t = \sqrt{\cos(x)}$, determine a família de primitivas da função

$$f(x) = \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}.$$

3. (4 val.)

- a) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log^n(x) = 0$, sendo n um número natural. Utilize, por exemplo, a mudança de variável $y = -\log x$.
b) Calcule, caso existam, o valor dos integrais $\int_0^1 \log(x) dx$ e $\int_0^1 \log^2(x) dx$.
c) Utilizando o Princípio de Indução Matemática, prove que:

$$\int_0^1 \log^n(x) dx = (-1)^n n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. (3 val.) Considere a sucessão definida por $u_n = \frac{n^2}{5n^3} + \frac{n^2}{5n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{5n^3+2n} = \sum_{k=0}^n \frac{n^2}{5n^3+2k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- a) Indique, sem simplificar os cálculos, quais os termos de ordem 1, 2 e 3 de (u_n) .
b) Prove que (u_n) é limitada.
c) Calcule o limite de (u_n) .

5. (3,5 val.) Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 6}} dx.$$

6. (3,5 val.) Calcule o valor da área do domínio limitado pelos gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^3 - 2x + 1$.