

Análise Matemática I D

Resolução do Exame de Recurso — 11 de Julho de 2011

Nota: Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.

1. Considere a função $h(x) = \log(x)$.

(a) Prove que a expressão que define a derivada de ordem n de h pode ser dada por:

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Mostre que o gráfico de $h^{(n)}$ admite uma assíntota horizontal e outra vertical. Indique as respectivas equações.

Resposta:

(a) Começemos por mostrar que para $n = 1$ obtemos uma proposição verdadeira:

$$h'(x) = (\log(x))' = \frac{1}{x} = (-1)^{1-1} \frac{(1-1)!}{x^1}.$$

Provemos agora que verificando-se a propriedade para o natural n também se verifica para o natural seguinte. Para tal, comecemos por definir uma hipótese e uma tese:

$$\text{Hipótese: } h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad \text{Tese: } h^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Prova da tese:

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= (h^{(n)}(x))' = \left((-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \right)' = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{1}{x^n} \right)' = \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! (-n) x^{-n-1} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

(b) O domínio de h é $\mathbb{R}^+$. Sendo $n \in \mathbb{N}$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, $h^{(n)}$ encontra-se bem definida. Assim, por forma a averiguar a existência de assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de $h^{(n)}$, vamos determinar os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h^{(n)}(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} h^{(n)}(x).$$

No primeiro caso temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$, o valor do limite pretendido será $+\infty$ ou $-\infty$, consoante n seja um número ímpar ou par, respectivamente. Desta forma, o gráfico de $h^{(n)}$ terá uma assíntota vertical de equação $x = 0$.

Determinemos agora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Então, o gráfico de $h^{(n)}$ apresenta uma assíntota horizontal de equação $y = 0$.

2. Considere $\tan x = t$, com $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

(a) Prove que $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ e que $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

(b) Utilizando a substituição indicada, calcule o valor de

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx.$$

Resposta:

(a) Pela fórmula fundamental da trigonometria sabemos que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Dividindo ambos os membros da equação por $\cos^2(x)$, por forma a obter $\tan(x)$, o que nos permitiria utilizar a relação indicada no enunciado, obtemos:

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Desta última igualdade resulta que $\cos(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Atendendo a que $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, podemos concluir que $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Recorrendo novamente à fórmula fundamental da trigonometria obtemos:

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Assim, $\sin(x) = \pm \sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}} = \pm \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}$. Novamente, como $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, podemos concluir que $\sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

(b) Pretendemos utilizar o método de integração por substituição, considerando a substituição $\tan(x) = t$, para calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx.$$

Como $\tan(x) = t$ vem $x = \arctan(t)$ e $(\arctan(t))' = \frac{1}{1+t^2}$. Por outro lado, $x = 0$ corresponde a $t = 0$ e $x = \frac{\pi}{6}$ corresponde a $t = \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Assim, recorrendo às expressões deduzidas na alínea anterior a partir da substituição considerada, vem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t}{(t-1)(t^2+1)} dt.$$

A função racional $\frac{t}{(t-1)(t^2+1)}$ admite uma decomposição do tipo

$$\frac{t}{(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1) + (Bt+C)(t-1)}{(t-1)(t^2+1)}.$$

Daqui resulta

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=1 \\ A-C=0 \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} B=-A \\ A+A=1 \\ C=A \end{cases}$$

Assim, $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ e $C = \frac{1}{2}$, pelo que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{t-1} + \frac{-t+1}{t^2+1} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2t}{t^2+1} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= \frac{1}{2} [\log |t-1|]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{4} [\log(t^2+1)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{1}{2} [\arctan(t)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \\ &= \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \frac{1}{4} \log \left(\frac{4}{3} \right) + \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

3. A superfície de uma peça mecânica consiste na área compreendida entre os gráficos das funções

$$y_1(x) = |x| \quad \text{e} \quad y_2(x) = 0.05x^2 + k.$$

- (a) Sabendo que a curva y_2 é tangente ao gráfico de y_1 , mostre que $k = 5$.
 (b) Calcule o valor da área da superfície correspondente.

Resposta:

- (a) Se a curva é tangente ao gráfico de $|x|$, então as abscissas dos pontos de tangência serão soluções da equação:

$$(0.05x^2 + k)' = \pm 1 \Leftrightarrow 0.1x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm 10.$$

Como a ordenada correspondente a $x = \pm 10$ é $y = 10$, obtemos

$$0.05 \times 10^2 + k = 10 \Leftrightarrow 5 + k = 10 \Leftrightarrow k = 5.$$

- (b) O valor da área corresponderá ao integral

$$\begin{aligned} \int_{-10}^{10} 0.05x^2 + 5 - |x| dx &= \int_{-10}^0 0.05x^2 + 5 + x dx + \int_0^{10} 0.05x^2 + 5 - x dx = \\ &= \left[\frac{0.05}{3} x^3 + 5x + \frac{x^2}{2} \right]_{-10}^0 + \left[\frac{0.05}{3} x^3 + 5x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{10} = \\ &= \frac{50}{3} + 50 - \frac{100}{2} + \frac{50}{3} + 50 - \frac{100}{2} = \frac{100}{3}. \end{aligned}$$

4.

- (a) Considerando $s > 1$, determine, caso exista, o valor do integral

$$\int_0^{+\infty} e^{(1-s)x} dx.$$

- (b) Considere uma função f , contínua em $[0, +\infty[$ e que verifica

$$\forall x \geq 0, \quad |f(x)| \leq e^x.$$

Mostre que

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

converge, qualquer que seja $s > 1$.

Resposta:

(a) Pela definição de integral impróprio de primeira espécie temos

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{(1-s)x} dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{(1-s)x} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{(1-s)x}}{1-s} \right]_0^T = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-s} (e^{(1-s)T} - 1) = \frac{-1}{1-s} = \frac{1}{s-1},\end{aligned}$$

uma vez que $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{(1-s)T} = 0$, porque $s > 1$.

(b) Como $|e^{-sx} f(x)| = |e^{-sx}| |f(x)| \leq e^{-sx} e^x = e^{(1-s)x}$, $\forall x \in [0, +\infty[$, aplicando um dos critérios de comparação e o facto de sabermos, pela alínea anterior, que o integral

$$\int_0^{+\infty} e^{(1-s)x} dx$$

é convergente, podemos concluir que o integral $\int_0^{+\infty} |e^{-sx} f(x)| dx$ é convergente. Logo o integral $\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$ é absolutamente convergente.

5. Calcule o valor dos seguintes limites:

(a) $\lim \left(\frac{e^n + 2}{e^n + 1} \right)^{e^{n+1}};$

(b) $\lim \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{n-1};$

(c) $\lim \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt[n]{2^k + 4^n}}{n}.$

Resposta:

(a) Como

$$\left(\frac{e^n + 2}{e^n + 1} \right)^{e^{n+1}} = \left(\frac{(1 + \frac{2}{e^n})^{e^n}}{(1 + \frac{1}{e^n})^{e^n}} \right)^e$$

do valor dos limites

$$\lim \left(1 + \frac{2}{e^n} \right)^{e^n} = e^2, \quad \lim \left(1 + \frac{1}{e^n} \right)^{e^n} = e,$$

conclui-se que

$$\lim \left(\frac{e^n + 2}{e^n + 1} \right)^{e^{n+1}} = \left(\frac{e^2}{e} \right)^e = e^e.$$

(b) $\lim \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{n-1} = 0$, porque $\lim (\sqrt[n]{2} - 1) = \lim \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = 0$ e $\lim (n-1) = +\infty$.

(c) Como $0 < 2^k < 4^k \leq 4^n$, qualquer que seja $k \in \{1, \dots, n\}$ e $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ é uma aplicação crescente, conclui-se que

$$\sqrt[n]{4^n} < \sqrt[n]{2^k + 4^n} \leq \sqrt[n]{4^n + 4^n},$$

qualquer que seja $k \in \{1, \dots, n\}$, ou seja

$$4 < \sqrt[n]{2^k + 4^n} \leq \sqrt[n]{2 \times 4^n}.$$

Desta forma,

$$\sum_{k=1}^n \frac{4}{n} < \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt[n]{2^k + 4^n}}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{4\sqrt[n]{2}}{n},$$

o que pode ser simplificado como

$$4 < \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt[n]{2^k + 4^n}}{n} \leq 4\sqrt[n]{2}.$$

Como $\lim 4\sqrt[n]{2} = 4 \lim 2^{\frac{1}{n}} = 4$, conclui-se, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, que

$$\lim \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt[n]{2^k + 4^n}}{n} = 4.$$

6.

(a) Calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 3x + 2}.$$

(b) É possível garantir a existência de $\varepsilon > 0$ tal que

$$|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 3x + 2} - 2 \right| < 0.001?$$

Caso seja possível, indique um valor ε nessas condições.

(Sugestão: Comece por factorizar os polinómios e simplificar a expressão da função racional.)

Resposta:

(a) O ponto $x = 1$ é um zero de ambos os polinómios $x^3 - 2x^2 - x + 2$ e $x^2 - 3x + 2$, pelo que na determinação do limite pedido nos deparamos com uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Factorizando ambos os polinómios, sabendo que $x = 1$ é uma raiz, obtemos $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2)$ e $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Usando a fórmula resolvente podemos ainda decompor $x^2 - x - 2$ como o produto $(x + 1)(x - 2)$, pelo que $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$. Assim,

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = x + 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

(b) Sim, é possível. Pela alínea (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 3x + 2} = 2$. Se recorrermos à definição de limite segundo Cauchy, sabemos que para todo o $\delta > 0$, neste caso $\delta = 0.001$, existe um $\varepsilon > 0$ que satisfaz a proposição do enunciado.

Determinemos um valor para ε nestas condições. Se usarmos a alínea (a) sabemos que

$$\left| \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 3x + 2} - 2 \right| = |(x + 1) - 2| = |x - 1|$$

Assim, basta considerar $\varepsilon \leq 0.001$ para que a proposição seja satisfeita.

7. Considere $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

- (a) Para a função g , determine a Fórmula de Taylor com resto de ordem 3, centrada no ponto $x = -1$.
- (b) Indique uma estimativa do erro máximo que se comete quando se efectua uma aproximação no intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$, utilizando a fórmula determinada na alínea anterior mas desprezando o resto de ordem 3.
- (c) Recorrendo à Fórmula de Taylor anteriormente determinada, calcule o valor de

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{x^2 - 1}.$$

- (d) Seja $p(x)$ o polinómio de grau 4 correspondente à Fórmula de Taylor da função g em torno de um ponto $a \in \mathbb{R}$. Justifique que $g(x) - p(x) = 0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Resposta:

- (a) Como a função g é polinomial, sabemos que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Podemos então aplicar o Teorema de Taylor no ponto $x = -1$ para escrever a Fórmula de Taylor com resto de ordem 3 para g . Obtemos que existe um c entre x e -1 ($x \in \mathbb{R}$ qualquer) tal que

$$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = g(-1) + g'(-1)(x+1) + g''(-1)\frac{(x+1)^2}{2!} + g'''(c)\frac{(x+1)^3}{3!}.$$

Temos que $g(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$, $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $g'(-1) = 3 - 2 + 1 = 2$, $g''(x) = 6x + 2$, $g''(-1) = -6 + 2 = -4$ e $g'''(x) = 6$. Então, substituindo na Fórmula de Taylor, obtemos

$$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = 0 + 2(x+1) - 4\frac{(x+1)^2}{2!} + 6\frac{(x+1)^3}{3!} = 2(x+1) - 2(x+1)^2 + (x+1)^3.$$

- (b) Pela alínea anterior o resto de ordem 3 é $(x+1)^3$. Se $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$, isto é, se $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$, então $0 \leq (x+1)^3 \leq (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$. Assim, o erro máximo que se comete quando se efectua uma aproximação no intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$, utilizando a fórmula determinada na alínea anterior mas desprezando o resto de ordem 3, é $\frac{1}{8}$, quando se toma $x = -\frac{1}{2}$.
- (c) No cálculo do limite deparamos-nos com uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Recorrendo à Fórmula de Taylor anteriormente determinada temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1) - 2(x+1)^2 + (x+1)^3}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1) - 2(x+1)^2 + (x+1)^3}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - 2(x+1) + (x+1)^2}{x-1} = \frac{2 - 2 \cdot 0 + 0}{-2} = -1. \end{aligned}$$

- (d) Sabemos que $g(x) - p(x) = g^{(4)}(c)\frac{(x-a)^4}{4!}$, o resto de Lagrange de ordem 4 com c entre a e x , para $x \in \mathbb{R}$ qualquer. Pelo que vimos na alínea (a), $g'''(x) = 6$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Então $g^{(4)}(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Assim $g(x) - p(x) = g^{(4)}(c)\frac{(x-a)^4}{4!} = 0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.