FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Exame de Recurso — 11 de Julho de 2011

1. (*3 val.*) Considere a função $h(x) = \log(x)$.

   (a) Prove que a expressão que define a derivada de ordem n de h pode ser dada por:

   $$h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (b) Mostre que o gráfico de $h^{(n)}$ admite uma assímptota horizontal e outra vertical. Indique as respectivas equações.

2. (*4 val.*) Considere $\tan x = t$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   (a) Prove que $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ e que $\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

   (b) Utilizando a substituição indicada, calcule o valor de

   $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\, dx.$$

3. (*2 val.*) A superfície de uma peça mecânica consiste na área compreendida entre os gráficos das funções

   $$y_1(x) = |x| \quad \text{e} \quad y_2(x) = 0.05x^2 + k.$$

   (a) Sabendo que a curva y_2 é tangente ao gráfico de y_1, mostre que $k = 5$.

   (b) Calcule o valor da área da superfície correspondente.

4. (*3 val.*)

   (a) Considerando $s > 1$, determine, caso exista, o valor do integral

   $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(1-s)x}\, dx.$$

   (b) Considere uma função f, contínua em $[0, +\infty[$ e que verifica

   $$\forall x \geq 0, \quad |f(x)| \leq \mathrm{e}^x\,.$$

   Mostre que

   $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x)\, dx$$

   converge, qualquer que seja $s > 1$.

5. (*3 val.*) Calcule o valor dos seguintes limites:

   (a) $\lim \left(\frac{e^n+2}{e^n+1}\right)^{e^{n+1}}$

   (b) $\lim \frac{\sqrt[n]{2}-1}{n-1}$

   (c) $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[n]{2^k+4^n}}{n}$

6. (*2 val.*)

   (a) Calcule o valor de
   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2}.$$

   (b) É possível garantir a existência de $\varepsilon > 0$ tal que
   $$|x-1| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2} - 2\right| < 0.001?$$
   Caso seja possível, indique um valor ε nessas condições. (Sugestão: Comece por factorizar os polinómios e simplificar a expressão da função racional.)

7. (*3 val.*) Considere $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

   (a) Para a função g, determine a Fórmula de Taylor com resto de ordem 3, centrada no ponto $x = -1$.

   (b) Indique uma estimativa do erro máximo que se comete quando se efectua uma aproximação no intervalo $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, utilizando a fórmula determinada na alínea anterior mas desprezando o resto de ordem 3.

   (c) Recorrendo à Fórmula de Taylor anteriormente determinada, calcule o valor de
   $$\lim_{x\to -1} \frac{g(x)}{x^2-1}.$$

   (d) Seja $p(x)$ o polinómio de grau 4 correspondente à Fórmula de Taylor da função g em torno de um ponto $a \in \mathbb{R}$. Justifique que $g(x) - p(x) = 0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.