ANÁLISE MATEMÁTICA I

1osemestre de 2016/2017

Ficha 1 - Noções Topológicas

1. Considere os seguintes subconjuntos de R

*A* =

*x ∈* R :*|x −* 3*|*

(*x* + 2)(*x −* 1) *≤* 0

e *B* = ] *− ∞,* 2] *∪ {*4*}.*

(a) Exprima o conjunto *A* como união de intervalos.

(b) Determine o interior, a fronteira e o derivado do conjunto *B* e a aderência de *A ∪ B*. (c) Averigúe se o conjunto *B* é fechado e/ou aberto. Justifique.

2. Considere os conjuntos *A* e *B* definidos por

e

*A* =

*x ∈* R :log(*x*2) *|x*2 *−* 4*|≥* 0

*B* = *{x ∈* R : *|x*2 *−* 1*| <* 1*}.*

(a) Exprima *A* e *B* como união de intervalos.

(b) Determine o interior de *A ∪ B*, os minorantes de *A ∩ B* e os pontos de acumulação de *B*. 3. Considere os seguintes subconjuntos de R

*A* = [*−π, −*1] *∪* [*e,* 10] *∪ {*0*}* e *B* =

*x ∈* R : *x* = (*−*1)*n*7

*n* + 1*, n ∈* N

*.*

(a) Determine o interior, a fronteira e o derivado do conjunto *A*.

(b) Averigúe se o conjunto *A* é aberto ou fechado. Justifique.

(c) Determine a fronteira, o derivado e a aderência de *A ∪ B*.

(d) Determine o conjunto dos minorantes e o conjunto dos majorantes de *A ∪ B*. (e) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de *A ∪ B*.

4. Considere os conjuntos *A* e *B* definidos por:

*A* =

*x ∈* R :2 *− | −* 4*x* + 6*|* log2(*x*2 *−* 1)*≥* 0

e

*B* = *{x ∈* R : *|√*2*x| ≤ √*6*}.*

(a) Apresentando todos os cálculos, escreva *A ∩ B* como união de intervalos. (b) Determine, justificando, o conjunto dos pontos fronteiros de *A∩B*. Averigúe se o conjunto *A ∩ B* é fechado.

1

5. Seja *D* o domínio da função real de variável real definida por

*f*(*x*) =

*√*2 *− x*~~2~~ *·* log(*x* + 1) sen(*x*)*.*

Seja *A* o conjunto dos termos da sucessão de termo geral *un* = (*−*1)*n*. (a) Apresentando todos os cálculos, escreva *D* como união de intervalos.

(b) Determine, justificando, o conjunto dos pontos de acumulação de *A ∪ D*. Averigúe se o conjunto *A ∪ D* é aberto ou fechado.

6. Seja *D* o domínio da função *f*, real de variável real, definida por *f*(*x*) = o interior e a fronteira do conjunto

*√*4 *− x*~~2~~

*x*. Determine

*D ∪*

*x ∈* R : *x* =2*n* + 1

*n, n ∈* N

*.*

7. Considere o conjunto *D* definido por

*D* =

*x ∈* R :(3 *− x*2)(5 *− x*2) *|x −* 2*|≤* 0

(a) Mostre que *D* = [*−√*5*, −√*3 ] *∪* [*√*3*,* 2[ *∪* ]2*,√*5 ]*.*

(b) Determine o interior, fronteira e derivado do conjunto *D*.

8. Seja *D* o domínio da função *f*, real de variável real, definida por *f*(*x*) = *x*

log (4 *− x*2). Deter

mine o interior e a fronteira do conjunto

*D ∪*

*x ∈* R : *x* = 2 +(*−*1)*n n, n ∈* N

*.*

9. Considere os seguintes subconjuntos de R:

*A* =

*x ∈* R :*x*

1 *− |x|>* 0

e

*B* =

*x ∈* R : *x* =6*n*

2*n*2 + 1*, n ∈* N

*.*

(a) Apresentando todos os cálculos, escreva *A* como união de intervalos. (b) Determine o conjunto dos majorantes e os pontos de acumulação de *A ∪ B*.

2

10. Considere o conjunto *A* definido por

*A* =

*x ∈* R :log(*x*) *x −* 4*>* 0

*.*

Seja *B* o domínio da função *f*, real de variável real, definida por *f*(*x*) = (a) Exprima *A* e *B* como uniões de intervalos.

p4*e*2 *− e*6*x*2*−*1 *−x*3 + 2*x*2 *−* 4*x*.

(b) Determine o interior de *A ∪ B*, os minorantes de *A ∩ B* e os pontos de acumulação de *B*.

(c) Seja (*an*) uma sucessão convergente de termos em *B*. É verdadeira ou falsa a proposição “O limite da sucessão (*an*) pertence a *B*”?

11. Considere os conjuntos

*A* =

*x ∈* R :*x −* 1

(*x −* 2)(*x −* 3) *<* 0

e

*B* =

*x ∈* R : *x* = 1 +(*−*1)*n n, n ∈* N

*.*

(a) Apresentando todos os cálculos, mostre que *A* = ] *− ∞,* 1[ *∪* ]2*,* 3[. (b) Determine a fronteira de *A ∪ B*.

(c) Indique, justificando, se *B ∪ {*2*}* é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

(d) Seja *X ⊂* R. Das seguintes afirmações indique as que são verdadeiras e as que são falsas. Para as afirmações que considerar falsas construa e apresente um exemplo para corroborar a sua classificação.

i) Se *x* é ponto interior de *X* então *x* é ponto de acumulação de *X*;

ii) Se *x* é ponto isolado de *X* então *x* é ponto fronteiro de *X*;

iii) A intersecção do conjunto *X0*com fr(*X*) é um conjunto vazio.

3