1–3

´Algebra Linear e inear e Geometria eometria Anal´ıtica nal´ıtica

Primeiro Teste – 26 de Outubro de 2019

Departamento de Matem´atica

PREENCHA DE FORMA BEM LEG´IVEL

Nome:

N´umero de caderno:

Grelha de Respostas

A B C D 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7. Aten¸c˜ao

Os primeiros 7 grupos desta prova s˜ao de escolha m´ultipla. Em cada um destes 7 grupos apenas uma das afirma¸c˜oes ´e falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

- Cota¸c˜ao: A cota¸c˜ao total desta prova ´e de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha m´ultipla a cota¸c˜ao atribu´ıda ´e a seguinte:

*•* Se n˜ao responder ou assinalar com um X mais do que uma op¸c˜ao: 0 valores;

*•* Se responder correctamente: +1,5 valores;

*•* Se responder erradamente: *−*0,5 valores.

A classifica¸c˜ao da parte de escolha m´ultipla (Grupos 1 a 7) ´e dada por max*{*0*,*M*}* , onde M designa a soma das classifica¸c˜oes obtidas nos 7 grupos de escolha m´ultipla.

- Dura¸c˜ao: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerˆancia).

1. Considere as seguintes matrizes





*A* =

"1 5 6 0 7 0 0 0 1 1

#

*, B* =

"1 5 6 0 0 0 0 0 1 1

#

*∈ M*2*×*5(R) e *C* =

1 1 3

*−*1 0 *−*2 *−*3 2 0

*∈ M*3*×*3(R)

Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

A A matriz *C* n˜ao ´e hemi-sim´etrica.

B A matriz *A* est´a em forma de escada reduzida.

C As matrizes *A* e *B* s˜ao equivalentes por linhas.

D A forma de escada reduzida de *C* ´e *I*3.

2. Para quaisquer matrizes *A, B ∈ Mn×n*(K) tem-se:

Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

A (*AB*)*>* = *B>A>*.

B *αA* + *B>* *>*= *αA>* + *αB*.

C Se *A* e *B* s˜ao invert´ıveis ent˜ao *A−*1*B>* ´e invert´ıvel e *A−*1*B>* *−*1= *A*(*B−*1)*>*.

D Se *A* e *B* s˜ao invert´ıveis ent˜ao a matriz 3*AB* ´e invert´ıvel e (3*AB*)*−*1 =13*B−*1*A−*1. ✄

Continua no verso desta folha

✂

✁

Departamento de Matem´atica FCT-UNL ALGA 2019/20 – 1o Teste 2–3 3. Para cada *a ∈* R e *b ∈* R, considere o sistema de equa¸c˜oes lineares, nas inc´ognitas *x, y, z*, sobre R, cuja

matriz ampliada ´e equivalente por linhas `a matriz



1 2 5 *−*1

0 *a −* 1 *−*1 1 0 0 *b* + 2 3



*.*

Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

A Se *a* = 1 e *b 6*= *−*5 ent˜ao o sistema ´e imposs´ıvel.

B Se *a ∈* R e *b* = *−*2 ent˜ao o sistema ´e imposs´ıvel.

C Se *a* = 1 e *b* = *−*5 ent˜ao o conjunto das solu¸c˜oes do sistema ´e *C* = *{*(4 *−* 2*α*2*, α*2*, −*1) : *α*2 *∈* R*}*. D Se *a* = 1 e *b 6*= *−*2 ent˜ao o sistema ´e poss´ıvel determinado.

4. Sejam *A, B ∈ Mn×n*(K) tal que det *A 6*= 0 e *A −−−−−→ l*2*↔l*3*A*1 *−−−−→* 4*l*1*A*2 *−−−−−−→ l*1+5*l*3*B.* Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

A det *B* = *−*14det *A*.

B A ´e invert´ıvel e *AB* ´e invert´ıvel.

C det(2*A>*) = 2*n* det *A*.

D det *A*2 = det *B*.

5. Sejam *A, B ∈ M*3*×*3(K) matrizes invert´ıveis que verificam: *A −−−−−→ l*2*↔l*3*A*1 *−−−−→* 4*l*2*A*2 *−−−−−−→ l*1+5*l*3*B.* Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

A As matrizes *A* e *B* tˆem a mesma caracter´ıstica.

B



1 0 0

0 0 1 0 1 0

 



1 0 0

0 4 0 0 0 1



*A* = *A*2.

C *B* ´e equivalente por linhas a *A*.

D



1 0 5

0 1 0 0 0 1



*A*2 = *B*. 



6. Considere a matriz *A* =

1 1 3

*−*1 0 *−*2 *−*2 2 0

 *∈ M*3*×*3(R).

Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e. A O complemento alg´ebrico do elemento da posi¸c˜ao (1*,* 3) da matriz *A* ´e *−*2.

B adj *A* =



4 4 *−*2

6 6 *−*4 *−*2 *−*1 1



.

C A matriz *A* ´e invert´ıvel e *A−*1 =12adj *A*.

D *A* adj *A* = 2*I*3.

7. Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

A O conjunto

"

0 0 0 0

#´e um subespa¸co vectorial de *M*2*×*2(R).

B O conjunto *I* = *{a* + *bi ∈* C : *b* = 0*}* ´e um subespa¸co do espa¸co vectorial real C.

C Para *n ≥* 2, o conjunto das matrizes n˜ao invert´ıveis de *Mn×n*(K) ´e um subespa¸co vectorial de *Mn×n*(K).

D R2[*x*] ´e subespa¸co vectorial de R2[*x*].

3–3

´Algebra Linear e inear e Geometria eometria Anal´ıtica nal´ıtica

Primeiro Teste – 26 de Outubro de 2019

Departamento de Matem´atica

S´o ser˜ao consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolu¸c˜ao, mude de folha sempre que mudar de grupo. [Cota¸c˜ao]

8. Considere a matriz *A* =



1 0 *−*2

0 3 0 1 3 *−*1



*∈ M*3*×*3(R).

[1.5] (a) Calcule o determinante de *A* por aplica¸c˜ao do Teorema de Laplace `a linha 2 de *A*. [2.0] (b) Justifique que a matriz *A* ´e invert´ıvel e determine a sua inversa.

(c) Escreva *A−*1

[2.0] como produto de matrizes elementares.

[1.0] (d) Considere o sistema de equa¸c˜oes lineares *AX* = *B* nas inc´ognitas *x, y, z* sobre R. Indique uma matriz *B ∈ M*3*×*1(R) tal que a sequˆencia (1*,* 0*, −*1) ´e solu¸c˜ao do sistema *AX* = *B*.

✄ ✂

Mude de Folha

✁

9. Sejam *A, B ∈ Mn×n*(R). Consideremos a matriz *C* = *B>AB*. Nesta conformidade, mostre que: [1.5] (a) (det *C*)(det *A*) > 0.

[1.5] (b) Se *B>B* = *In* ent˜ao det *C* = det *A*.

✄ ✂

Fim

✁

i–ii

´Algebra Linear e inear e Geometria eometria Anal´ıtica nal´ıtica

Departamento de Matem´atica

1. C

2. C

3. D

4. A

5. B

6. B

7. C

Uma resolu¸c˜ao com notas explicativas

8. (a) Calculemos o determinante de *A* aplicando o Teorema de Lapalace `a linha 2 de *A*.

det(*A*)Lapl.

=*l*23 *·* b*a*22 = 3 *·* (*−*1)2+2

1 *−*2 1 *−*1

= 3 *·* (*−*1 + 2) = 3*.*

(b) A matriz *A* ´e invert´ıvel se, e s´o se, det(*A*) *6*= 0 como det(*A*) = 3 ent˜ao *A* ´e invert´ıvel. Determinemos a inversa da matriz *A*.

Tem-se:

[*A|I*3] =



1 0 *−*2 1 0 0

0 3 0 0 1 0 1 3 *−*1 0 0 1



*−−−−→ l*3 *− l*1



1 0 *−*2 1 0 0

0 3 0 0 1 0 0 3 1 *−*1 0 1



*−−−−→ l*3 *− l*2



1 0 *−*2 1 0 0

0 3 0 0 1 0 0 0 1 *−*1 *−*1 1



*−−−−−→ l*1 + 2*l*3



1 0 0 *−*1 *−*2 2

0 3 0 0 1 0 0 0 1 *−*1 *−*1 1



*−→*13*l*2



1 0 0 *−*1 *−*2 2

0 1 0 0130 0 0 1 *−*1 *−*1 1



= [*I*3*|A−*1]*.*

Logo, a inversa de *A* ´e



*−*1 *−*2 2

0130 *−*1 *−*1 1



.

(c) Atendendo `a al´ınea anterior temos que

*A −−−−−→ l*3*−l*1*A*1 *−−−−−→ l*3*−l*2*A*2 *−−−−−−→ l*1+2*l*3*A*3*−−−→*13*l*2*I*3*.*

Consideremos as matrizes elementares *E*1*, E*2*, E*3 e *E*4 tais que:

*I*3 *−−−−−→ l*3*−l*1*E*1, ou seja, *E*1 = *I*3 *−−−−−→ l*3*−l*2*E*2, ou seja, *E*2 =



1 0 0

0 1 0 *−*1 0 1 

1 0 0

0 1 0 0 *−*1 1



;



;

*I*3 *−−−−−−→ l*1+2*l*3*E*3, ou seja, *E*3 = *I*3*−−−−→*13*l*2*E*4, ou seja, *E*4 =



1 0 2

0 1 0 0 0 1 

1 0 0

0130 0 0 1



;



*.*

Departamento de Matem´atica FCT-UNL ALGA 2019/20 – Uma resolu¸c˜ao do 1o Teste ii–ii

Como efetuar uma transforma¸c˜ao elementar *T* nas linhas de uma matriz corresponde a multiplicar a matriz, `a esquerda, pela matriz elementar obtida, a partir da matriz identidade, efetuando a mesma transforma¸c˜ao elementar *T*, podemos afirmar que *E*4*E*3*E*2*E*1*A* = *I*3 e, portanto,

*A−*1 = *E*4*E*3*E*2*E*1 =



1 0 0

0130 0 0 1

 



1 0 2

0 1 0 0 0 1

 



1 0 0

0 1 0 0 *−*1 1

 



1 0 0

0 1 0

*−*1 0 1 



*.*



10

(d) Considerando o sistema *AX* = *B*, sabemos que (1*,* 0*, −*1) ´e solu¸c˜ao se, e s´o se, *A −*1

 = *B*.

Assim, efectuando a multiplica¸c˜ao de *A* por



10 *−*1



obteremos a matriz *B*:





1 0 *−*2



0 3 0

1 3 *−*1

9. Dadas *A, B ∈ Mn×n*(R), seja *C* = *B>AB*.



10 *−*1



 =



30 2



 = *B.*

(a) Atendendo a que o determinante do produto de duas (ou mais) matrizes quadradas, da mesma ordem, ´e igual ao produto dos determinantes das matrizes em causa; ent˜ao sai que

det *C* = det *B>* det *A* det *B* = det *B* det *A* det *B* = (det *B*)2 det *A.*

Uma vez que det *B>* = det *B*, do exposto resulta que

(det *C*)(det *A*) = (det *B*)2 det *A* det *A* = (det *B*)2(det *A*)2 > 0*.*

(b) Suponhamos que *B>B* = *In*. Tendo presente que o determinante do produto de duas matrizes quadradas, da mesma ordem, ´e igual ao produto dos determinantes das duas matrizes em causa; ent˜ao podemos concluir que

det *B>* det *B* = det *B>B*= det *In* = 1*.*

Por outro lado, atendendo a que det *B>* = det *B*, do que acima foi exposto resulta (det *B*)2 = det *B* det *B* = det *B>* det *B* = 1*.*

Como j´a vimos que det *C* = (det *B*)2 det *A* ent˜ao temos

det *C* = det *A.*