1–3

´Algebra Linear e inear e Geometria eometria Anal´ıtica nal´ıtica

Primeiro Teste – 07 de Novembro de 2018

Departamento de Matem´atica

PREENCHA DE FORMA BEM LEG´IVEL

Nome:

Grelha de Respostas

|  | A  | B  | C  | D |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. |  |  |  |  |
| 2. |  |  |  |  |
| 3. |  |  |  |  |
| 4. |  |  |  |  |
| 5. |  |  |  |  |

N´umero de caderno:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |

Aten¸c˜ao

Os primeiros 5 grupos desta prova s˜ao de escolha m´ultipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirma¸c˜oes ´e falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha m´ultipla ser´a recolhida ao fim de uma hora e meia de prova.

- Cota¸c˜ao: A cota¸c˜ao total desta prova ´e de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha m´ultipla a cota¸c˜ao atribu´ıda ´e a seguinte:

*•* Se n˜ao responder ou assinalar com um X mais do que uma op¸c˜ao: 0 valores;

*•* Se responder correctamente: +1,5 valores;

*•* Se responder erradamente: *−*0,5 valores.

| max*{*0*,*M*}*  |
| --- |

A classifica¸c˜ao da parte de escolha m´ultipla (Grupos 1 a 5) ´e dada por , onde M designa a soma das classifica¸c˜oes obtidas nos 5 grupos de escolha m´ultipla.

- Dura¸c˜ao: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerˆancia).

1. Considere as seguintes matrizes

*A* =



*−*1 1 0

0 1 2

*−*1 2 0



*, B* =



1 2 0

1 2 2 2 4 1



*∈ M*3*×*3(R)*.*

Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

| A |
| --- |

(*AB*)*>* 32 = 4.

| B  |
| --- |

| C  |
| --- |

A matriz *A* ´e invert´ıvel e det *A* = 2.

O sistema *AX* = 0 ´e um sistema poss´ıvel determinado.

| D  |
| --- |

A forma de escada reduzida de *B* ´e



1 0 0

0 0 1 0 0 0



.

✄

Continua no verso desta folha

✂

✁

Departamento de Matem´atica FCT-UNL ALGA 2018/19 – 1o Teste 2–3

2. Considere a matriz *B ∈ M*3*×*3(R) obtida a partir de *A ∈ M*3*×*3(R) efetuando as seguintes transforma¸c˜oes elementares sobre linhas:

*A −−−−−→* 2*l*1*A*1 *−−−−−−−−−−−−→ l*2+(*−*3)*l*1*A*2 *−−−−−→ l*2*↔l*3*B.*

Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

| A  |
| --- |

Se det *A* = 5 ent˜ao det *B* = *−*52.

| B |
| --- |



1 0 0

*−*3 1 0 0 0 1

 



2 0 0

0 1 0 0 0 1



*A* = *A*2. 











| C  |
| --- |

Se *B* = *I*3 ent˜ao *A−*1 =

1 0 0

0 0 1 0 1 0



1 0 0

*−*3 1 0 0 0 1



2 0 0

0 1 0 0 0 1

.

| D  |
| --- |

Se *A* ´e invert´ıvel ent˜ao *A*1*, A*2 e *B* s˜ao invert´ıveis.

3. Para cada *a ∈* R e *b ∈* R, considere o sistema de equa¸c˜oes lineares, nas inc´ognitas *x, y, z*, sobre R, cuja matriz ampliada ´e equivalente por linhas `a matriz:



1 1 *−*1 *−*1

0 *b − a* 1 1 0 *a − b a*2 *−* 2 *a*



*.*

Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

| A  |
| --- |

Se *a 6*= *b* e *a /∈ {−*1*,* 1*}* ent˜ao o sistema ´e poss´ıvel determinado.

| B  |
| --- |

Se *a* = *−*1 ent˜ao, para qualquer *b ∈* R, o sistema ´e poss´ıvel indeterminado com grau de indetermina¸c˜ao 1.

| C  |
| --- |

Se *a* = 1 e *b* = 1 ent˜ao o sistema ´e poss´ıvel indeterminado com grau de indetermina¸c˜ao 1.

| D  |
| --- |

Se *a* = 1 e *b 6*= 1 ent˜ao o sistema ´e imposs´ıvel.

4. Sejam *A, B ∈ M*5*×*5(R) tal que det *A* = 2 e det *B* = *−*3. Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

| A  |
| --- |

*AB* pode escrever-se como o produto de matrizes elementares. A ´e invert´ıvel e det(*A−*1*B>*) = *−*32.

| B  |
| --- |

| C  |
| --- |

det(*−*2*B*) = 6.

| D  |
| --- |

Para qualquer matriz invert´ıvel *C ∈ M*5*×*5(R) tem-se r(*AC*) = 5.

5. Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

| A  |
| --- |

*G* =

 "

*a b c*

*d e* 0

#

*∈ M*2*×*3(R) :

´e subespa¸co vetorial de *M*2*×*3(R).

*F* =(*a, b*) *∈* R2: *a* + *b* = 1n˜ao ´e subespa¸co vetorial de R2.

| B  |
| --- |

| C  |
| --- |

*H* = *{A ∈ Mn×n*(R) : *A* ´e invert´ıvel*}* n˜ao ´e subespa¸co vetorial de *Mn×n*(R).

| D  |
| --- |

*S* = *{A ∈ Mn×n*(R) : *A* n˜ao ´e invert´ıvel *}* ´e subespa¸co vetorial de *Mn×n*(R) se *n >* 1.

3–3

´Algebra Linear e inear e Geometria eometria Anal´ıtica nal´ıtica

Primeiro Teste – 07 de Novembro de 2018

Departamento de Matem´atica

S´o ser˜ao consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolu¸c˜ao, mude de folha sempre que mudar de grupo. [Cota¸c˜ao]

6. Considere a matriz *A* =



1 0 0 *β*

1 *α* 0 0 2 0 1 0 3 0 1 0



*∈ M*4*×*4(R), com *α, β ∈* R.

(a) Determine, apresentando todos os c´alculos efectuados, det(*A*(4*|*4)) e *A*b [2.0] 14. [2.0] (b) Calcule o determinante de *A* e indique, justificando, para que valores de *α* e *β* a matriz *A* ´e invert´ıvel. [1.5] (c) Tomando *α* = 2, determine a inversa da matriz *A*(4*|*4).

✄ ✂

Mude de Folha

✁

7. Considere a matriz *Cα,β ∈ M*3*×*4(R), com *α, β ∈* R: 



*Cα,β* =

1 *α* 2 0

0 *α* + 3 1 *β −*1 3 *β −* 1 *β*

*.*

[2.0] (a) Discuta a caracter´ıstica de *Cα,β* em fun¸c˜ao de *α* e de *β*.

[2.0] (b) Verifique que para *α* = *−*3 e *β* = 0 o sistema *Cα,βX* = 0 ´e poss´ıvel indeterminado e indique, justifi cando, o conjunto das solu¸c˜oes do sistema.

✄

Mude de Folha

✂

✁

(a) det(adj *A*)=1

[1.0] .

(det *A*)*~~n−~~*~~1~~

(b) A matriz adj *A* ´e invert´ıvel e (adj *A*) [1.0] *−*1

 Partilhar



FicheiroEditarVerInserirFormatarFerramentasSuplementosAjudaA última edição foi efetuada há segundos

 Texto normal

 Arial

Editar

= adj *A.* [1.0] (c) Se det *A* = 1 ent˜ao *A−*1 = *A.*

✄ ✂

Fim

✁

i–iii

´Algebra Linear e inear e Geometria eometria Anal´ıtica nal´ıtica

Departamento de Matem´atica

1. D

2. A

3. C

4. C

5. D





Uma resolu¸c˜ao com notas explicativas

6. (a) Calculemos o determinante da matriz *A*(4*|*4) =

1 0 0

1 *α* 0 2 0 1

. Como a matriz *A*(4*|*4) ´e triangular

inferior o seu determinante corresponde ao produto dos elementos da diagonal principal, donde det(*A*(4*|*4)) = *α*. O complemento alg´ebrico da posi¸c˜ao (1*,* 4) da matriz *A* ´e dado por

*A*b14 = (*−*1)1+4

1 *α* 0

2 0 1 3 0 1

 Lapl.

=*c*2(*−*1)*α*(*−*1)1+2

2 1 3 1

= *α*(2 *−* 3) = *−α.*

(b) Calculemos o determinante de *A* aplicando o Teorema de Lapalace `a quarta coluna: det(*A*) = *β · A*b14 = *−αβ.*

A matriz *A* ´e invert´ıvel se, e s´o se, det(*A*) *6*= 0. Portanto, *A* ´e invert´ıvel se, e s´o se, *α, β ∈* R*\{*0*}*.

(c) Determinemos a inversa da matriz *B* =



1 0 0

1 2 0 2 0 1



obtida de *A*(4*|*4) com *α* = 2. Tem-se

[*B|I*3] =



1 0 0 1 0 0

1 2 0 0 1 0 2 0 1 0 0 1 



*−−−−→ l*2*−l*1 *l*3*−*2*l*1



1 0 0 1 0 0

0 2 0 *−*1 1 0 0 0 1 *−*2 0 1 



*−→*12*l*2



1 0 0 1 0 0

0 1 0 *−*12120 0 0 1 *−*2 0 1



= [*I*3*|B−*1]*.*

Logo, a inversa de *B* ´e

1 0 0

*−*12120 *−*2 0 1

.

7. (a) Dado que a caracter´ıstica da matriz *Cα,β* ´e o n´umero de linhas n˜ao nulas de uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a *Cα,β*, tem-se:

*Cα,β* =



1 *α* 2 0

0 *α* + 3 1 *β −*1 3 *β −* 1 *β*



*−−−−→ l*3 *− l*1



1 *α* 2 0

0 *α* + 3 1 *β* 0 *α* + 3 *β* + 1 *β*



*−−−−→ l*3 *− l*2



1 *α* 2 0

0 *α* + 3 1 *β* 0 0 *β* 0



 = *C0.*

Assim r(*Cα,β*) = r(*C0*) Podemos ent˜ao considerar os seguintes casos:

*•* Se *α* + 3 *6*= 0 *∧ β 6*= 0 ent˜ao *C0* =



1 *α* 2 0

0 *α* + 3 1 *β* 0 0 *β* 0



(f.e.) e, portanto, r(*Cα,β*) = 3;

Departamento de Matem´atica FCT-UNL ALGA 2018/19 – Uma resolu¸c˜ao do 1o Teste ii–iii

*•* Se *α* + 3 *6*= 0 *∧ β* = 0 ent˜ao *C0* = 



1 *α* 2 0

0 *α* + 3 1 0

0 0 0 0 



(f.e.) e, portanto, r(*Cα,β*) = 2; 



*•* Se *α*+3 = 0*∧β 6*= 0 ent˜ao *C0* = r(*Cα,β*) = 3;

1 *−*3 2 0

0 0 1 *β* 0 0 *β* 0



*−−−−−→ l*3 *− βl*2 

1 *−*3 2 0

0 0 1 *β* 0 0 0 *−β*2

(f.e.) e, portanto,

*•* Se *α* + 3 = 0 *∧ β* = 0 ent˜ao *C0* =

1 *−*3 2 0

0 0 1 0 0 0 0 0

(f.e.) e, portanto, r(*Cα,β*) = 2.

Podemos ent˜ao concluir que para qualquer *α ∈* R,

se *β 6*= 0 ent˜ao r(*Cα,β*) = 3;

se *β* = 0 ent˜ao r(*Cα,β*) = 2.

(b) (c Para para *α* = *−*3 e *β* = 0, pela al´ınea (a), r(*Cα,β*) = 2 = r([*Cα,β|*0]) *<* 4 =no de inc´ognitas do sistema. Podemos assim concluir que o sistema *Cα,βX* = 0 ´e poss´ıvel indeterminado com grau de indetermina¸c˜ao *g.i.* = 4 *−* r(*Cα,β*) = 4 *−* 2 = 2.

Determinemos o conjunto de solu¸c˜oes do sistema:



1 *−*3 2 0 0

0 0 1 0 0 *−*1 *−*3 *−*1 0 0



*−−−−→ l*3 + *l*1



1 *−*3 2 0 0

0 0 1 0 0 0 0 1 0 0



*−−−−→ l*3 *− l*2



1 *−*3 2 0 0

0 0 1 0 0 0 0 0 0 0



*−−−−−→ l*1 *−* 2*l*2



1 *−*3 0 0 0

0 0 1 0 0 0 0 0 0 0



(f.e.r.)*.*

Deste modo, o sistema correspondente ´e: 



*x* = 3*y z* = 0 0 = 0

*.*

Temos ent˜ao que o conjunto de solu¸c˜oes do sistema ´e

C*.*S*.* = *{*(*α*1*, α*2*, α*3*, α*4) *∈* R4: *α*1 = 3*α*2 *∧ α*3 = 0*}* = *{*(3*α*2*, α*2*,* 0*, α*4)) : *α*2*, α*4 *∈* R*}.* 8. Seja *A ∈ Mn×n*(K). Suponhamos que *A* ´e uma matriz invert´ıvel e que

*A* = det *A* adj *A.*

(a) Seja *α* = det *A*. Como *A* ´e invert´ıvel podemos afirmar que det(*A*) *6*= 0. Tendo presente que adj *A* ´e uma matriz quadrada de ordem *n* e que, por hip´otese, *A* = *α* adj *A* ent˜ao, fazendo uso de um resultado leccionado nas aulas te´oricas, conclui-se que: det *A* = *αn* det(adj *A*). Como *α* = det *A* ent˜ao

det *A* = (det *A*)*n* det(adj *A*)*.*

Tendo em considera¸c˜ao que, por hip´otese, *A* ´e uma matriz invert´ıvel, ou equivalentemente que

det *A 6*= 0, temos

(det *A*)*n*=1

det(adj *A*) = det *A*

(det *A*)*n−*1*.*

Departamento de Matem´atica FCT-UNL ALGA 2018/19 – Uma resolu¸c˜ao do 1o Teste iii–iii

(b) Como det *A 6*= 0 e, por hip´otese, *A* = det *A* adj *A* ent˜ao

1

det *AA* = adj *A.*

Atendendo a que, por hip´otese, *A* ´e invert´ıvel ent˜ao adj *A* ´e invert´ıvel e

(adj *A*)*−*1 =

1

det *A*

 *−*1

*A−*1 = (det *A*)*A−*1*.*

Por outro lado, de acordo com a mat´eria leccionada nas aulas te´oricas, temos que *A−*1 =1

det *A*adj *A.*

Assim, do exposto resulta que

(adj *A*)*−*1 = (det *A*)*A−*1 = det *A*1

det *A*adj *A* = adj *A.*

(c) Suponhamos que det *A* = 1. Como, por hip´otese, *A* = det *A* adj *A* ent˜ao *A* = adj *A.*

Por outro lado, de acordo com a mat´eria leccionada nas aulas te´oricas, temos que *A−*1 =1

det *A*adj *A.*

Atendendo a que det *A* = 1 e *A* = adj *A*, temos

*A−*1 =1

det *A*adj *A* = 1*A* = *A.*