1–3

´Algebra Linear e inear e Geometria eometria Anal´ıtica nal´ıtica

Primeiro Teste – 08 de Novembro de 2017

Departamento de Matem´atica

PREENCHA DE FORMA BEM LEG´IVEL

Nome:

N´umero de caderno:

Aten¸c˜ao

Grelha de Respostas

A B C D 1.

2.

3.

4.

5.

Os primeiros 5 grupos desta prova s˜ao de escolha m´ultipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirma¸c˜oes ´e falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha m´ultipla ser´a recolhida ao fim de uma hora e meia de prova.

- Cota¸c˜ao: A cota¸c˜ao total desta prova ´e de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha m´ultipla a cota¸c˜ao atribu´ıda ´e a seguinte:

*•* Se n˜ao responder ou assinalar com um X mais do que uma op¸c˜ao: 0 valores;

*•* Se responder correctamente: +1,8 valores;

*•* Se responder erradamente: *−*0,6 valores.

A classifica¸c˜ao da parte de escolha m´ultipla (Grupos 1 a 5) ´e dada por max*{*0*,*M*}* , onde M designa a soma das classifica¸c˜oes obtidas nos 5 grupos de escolha m´ultipla.

- Dura¸c˜ao: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerˆancia).

1. Considere as seguintes matrizes

*A* =



1 2 0

*−*1 1 1 1 0 1



*∈ M*3*×*3(R)*, B* =



1 2 3

0 1 *−*2 1 0 0



*∈ M*3*×*3(R)*, C* =



1 0

1 1

0 1



*∈ M*3*×*2(R)*.*

Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

A (*AB*)21 = 0 e (*BA*)21 = *−*3.

B*A*2 11 = *−*1.

C*CC>* 31 =*CC>* 13 = 0.

D *A*2 *− B*2 = (*A − B*)(*A* + *B*).

✄

Continua no verso desta folha

✂

✁

Departamento de Matem´atica FCT-UNL ALGA 2017/18 – 1o Teste 2–3

2. Considere a seguinte matriz *A* =

FALSA. Indique qual ´e.

A (adj *A*)22 = 4.

B det *A* = 2.

C*A−*1 22 = 2.

D det 3*A>*= 6.



2 1 0 0

1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 3



*∈ M*4*×*4(R). Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e

3. Considere a matriz *B ∈ M*3*×*3(R) obtida a partir de *A ∈ M*3*×*3(R) efetuando as seguintes transforma¸c˜oes elementares sobre linhas:

*A −−−−−−−→ l*2*↔l*3*A*1 *−−−−−−−−−→* (*−*1)*l*3*A*2 *−−−−−−−−−→ l*1+(*−*2)*l*2*B.*

Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

A As matrizes *A* e *B* tˆem a mesma forma de escada reduzida.

B Se *B* ´e a matriz identidade *I*3, ent˜ao *A−*1 =



1 0 *−*2

0 0 1 0 *−*1 0



.

C Se *A* =



1 0 1

*−*3 1 1 0 1 2



ent˜ao *B* =



1 *−*2 *−*3

0 1 2 3 *−*1 *−*1



.

D *B* =



1 0 0

0 0 1 0 1 0

 



1 0 0

0 1 0 0 0 *−*1

 



1 *−*2 0

0 1 0 0 0 1



*A*, para quaisquer matrizes *A* e *B* nas condi¸c˜oes do

enunciado.

4. Para cada *a ∈* R e *b ∈* R, considere o sistema de equa¸c˜oes lineares, nas inc´ognitas *x, y, z*, sobre R,

 

(*b −* 1)*x* + *y − z* = 1 (*a*2 *−* 1)*y* + *z* = 2

*.*

(*a − b*)*z* = *b* + 2

Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

A Se *a 6*= *b*, *b 6*= 1 e *a* = *−*1 o sistema ´e poss´ıvel determinado.

B Se *a* = *−*2 e *b* = *−*2 ent˜ao o sistema ´e poss´ıvel, indeterminado com grau de indetermina¸c˜ao 1. C Para *a* = 0 e *b* = 2, (3*, −*4*, −*2) ´e a ´unica solu¸c˜ao do sistema.

D Se *a* = 1 e *b* = 1 o conjunto de solu¸c˜oes do sistema ´e o conjunto vazio.

5. Apenas uma das seguintes afirma¸c˜oes ´e FALSA. Indique qual ´e.

A *F* =(*a, b*) *∈* R2: *b* = *a*2 n˜ao ´e subespa¸co vetorial de R2.

B *G* =

"

*a b*

#

*∈ M*2*×*2(R) : *a* + *d* = 0

´e subespa¸co vetorial de *M*2*×*2(R).

"

C *H* =

*c d*

*a b c d*

#

*∈ M*2*×*2(R) : *ad − cb 6*= 0

´e subespa¸co vetorial de *M*2*×*2(R).

D Em qualquer espa¸co vetorial real *E*, se *u, v ∈ E* e *α, β ∈* R, ent˜ao *αu − βv ∈ E*.

3–3

´Algebra Linear e inear e Geometria eometria Anal´ıtica nal´ıtica

Primeiro Teste – 08 de Novembro de 2017

Departamento de Matem´atica

S´o ser˜ao consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolu¸c˜ao, mude de folha sempre que mudar de grupo. [Cota¸c˜ao]

6. Considere as matrizes *A* e *B ∈ M*3*×*3(R), com *B* equivalente por linhas a *A* e

*A* =



0 2 *−*2

1 0 1 1 2 0



*.*

[1.5] (a) Usando o Teorema de Laplace, calcule o determinante da matriz *A*. [1.0] (b) Indique, justificando, a forma de escada reduzida de *B*. (c) Justifique que a matriz *A* ´e invert´ıvel e indique det(*A−*1

[1.0] ).



✄

✂



Mude de Folha

✁

7. Considere a matriz *X* =

*xy z*

*∈ M*3*×*1(R), e para cada *α, β ∈* R, as matrizes

*Cα,β* =



0 0 *α*2 *−* 1

0 *α* + 1 2 *β* 2 *−*1



*∈ M*3*×*3(R) e *Bα* =



0

*α* + 1

2



*∈ M*3*×*1(R)*.*

[1.0] (a) Indique, justificando, a express˜ao do determinante da matriz *Cα,β* e conclua para que valores de *α* e de *β* a matriz *Cα,β* ´e invert´ıvel.

[1.0] (b) Indique, justificando, para que valores de *α* e *β* o sistema *Cα,βX* = *Bα* ´e um sistema de Cramer. [1.5] (c) Seja (*a, b, c*) a solu¸c˜ao do sistema *Cα,βX* = *Bα*, para *α* = 2 e *β* = 1. Indique o valor de *a* utilizando a regra de Cramer.

✄ ✂

Mude de Folha

✁

8. Duas matrizes *A, B ∈ Mn×n*(K) (com *n ∈* N) dizem-se semelhantes se existe uma matriz invert´ıvel *P ∈ Mn×n*(K) tal que *A* = *P−*1*BP*. Sejam *A, B ∈ Mn×n*(K) matrizes semelhantes.

(a) Mostre que *Ak*e *Bk*

[2.0] s˜ao matrizes semelhantes, para qualquer *k ∈* N.

(b) Sabendo que, para qualquer matriz *C ∈ Mn×n*(K), se tem *r*(*C*) = *r*(*CT*

[2.0] ), mostre que *r*(*A*) = *r*(*B*). Sugest˜ao: Justifique que *r*(*A*) = *r*(*P A*), para qualquer matriz invert´ıvel *P ∈ Mn×n*(K).

✄ ✂

Fim

✁

i–iii

´Algebra Linear e inear e Geometria eometria Anal´ıtica nal´ıtica

Departamento de Matem´atica

1. D

2. D

3. D

4. A

5. C

Uma resolu¸c˜ao com notas explicativas

6. (a) Calculemos ent˜ao o determinante da matriz *A*, aplicando o Teorema de Laplace em rela¸c˜ao `a coluna 1:

0 2 *−*2

1 0 1 1 2 0

Lapl.

=*c*11(*−*1)2+1

2 *−*2 2 0

+ 1(*−*1)3+1 2 *−*2 0 1

= *−*(0 + 4) + (2 *−* 0) = *−*4 + 2 = *−*2*.*

(b) Dado que det(*A*) *6*= 0 a matrix *A* ´e invert´ıvel e, portanto, a sua forma de escada reduzida ´e a matriz identidade *I*3.

Como matrizes equivalentes por linha tˆem a mesma forma de escada reduzida, podemos afirmar que a forma de escada reduzida de *B* ´e igual `a forma de escada reduzida de *A*. Logo, a forma de escada reduzida de *B* ´e tamb´em *I*3.

O leitor pode verificar que

*A −−−−−→ l*1*↔l*2*A*1 *−−−−−→ l*3*−l*1*A*2 *−−−−−→ l*3*−l*2*A*3 *−−−−−→ l*1*−l*3*A*4 *−−−−−−→ l*2+2*l*3*A*5*−−−−→*12*l*2*I*3*.*

(c) A matriz *A* ´e invert´ıvel se, e s´o se, det(*A*) *6*= 0. Como em (a) verific´amos que det(*A*) = *−*2 *6*= 0, podemos concluir que *A* ´e uma matriz invert´ıvel.

Sabemos que det(*A−*1) = 1

det(*A*)e, portanto,

det(*A−*1) = *−*12*.*

7. (a) Ora

det *Cα,β* =

0 0 *α*2 *−* 1

0 *α* + 1 2 *β* 2 *−*1

= *l*1 *←→ l*3*−**β* 2 *−*1

0 *α* + 1 2

0 0 *α*2 *−* 1

= *−β*(*α* + 1)(*α*2 *−* 1)*.*

A matriz *Cα,β* ´e invert´ıvel se, e s´o se, det *Cα,β 6*= 0. Como

det *Cα,β 6*= 0 *⇐⇒ −β*(*α* + 1)(*α*2 *−* 1) *6*= 0 *⇐⇒ β 6*= 0 *∧ α 6*= *−*1 *∧ α 6*= 1*,*

conclu´ımos que *Cα,β* ´e invert´ıvel se, e s´o se, *α ∈* R *\ {−*1*,* 1*}* e *β ∈* R *\ {*0*}*.

(b) Um sistema de equa¸c˜oes lineares diz-se de Cramer se a matriz simples do sistema ´e invert´ıvel. Assim, atendendo `a al´ınea (a), o sistema *Cα,βX* = *Bα* ´e de Cramer se, e s´o se, *α ∈* R *\ {−*1*,* 1*}* e *β ∈* R *\ {*0*}*.

(c) Observemos que para *α* = 2 e *β* = 1, o sistema *C*2*,*1*X* = *B*2 ´e de Cramer, sendo

*C*2*,*1 =



0 0 3

0 3 2 1 2 *−*1



e *B*2 =



03 2

 

Departamento de Matem´atica FCT-UNL ALGA 2017/18 – Uma resolu¸c˜ao do 1o Teste ii–iii e tendo-se det *C*2*,*1 *6*= 0*.* Aplicando a regra de Cramer, obtemos

0 0 3

3 3 2 2 2 *−*1

*a* =

*C*2*,*1 =0

*C*2*,*1= 0*.*

8. Sejam *A, B ∈ Mn×n*(K). Suponhamos que as matrizes *A* e *B* s˜ao semelhantes. Ent˜ao existe pelo menos uma matriz invert´ıvel *P ∈ Mn×n*(K) tal que *A* = *P−*1*BP*.

(a) Dado *k ∈* N, ´e claro que

*Ak* = (*P−*1*BP*)(*P−*1*BP*)*. . .*(*P−*1*BP*)(*P−*1*BP*)

*.*

| {z } onde *P −*1*BP* ocorre *k* vezes

Usando a propriedade associativa da multiplica¸c˜ao de matrizes, a defini¸c˜ao de inversa de uma matriz e o facto de *InB* = *B* = *BIn*, obtemos

*Ak* = *P−*1(*BB . . . BB* | {z } *k* vezes

)*P* = *P−*1*BkP.*

Em bom rigor, ´e necess´ario demonstrar por indu¸c˜ao matem´atica que, para qualquer *k ∈* N,

*P−*1*BP* *k*= *P−*1*BkP.*

Para *k* = 1 ´e claro (por defini¸c˜ao de potˆencia de uma matriz quadrada) que *P−*1*BP* *k*= *P−*1*BP* = *P−*1*BkP*.

Dado *m ∈* N, suponhamos, por hip´otese de indu¸c˜ao, que

*P−*1*BP* *m*= *P−*1*BmP.*

De acordo com a defini¸c˜ao de potˆencia de uma matriz quadrada, temos que *P−*1*BP* *m*+1=

*P−*1*BP* *m P−*1*BP*. Fazendo uso da hip´otese de indu¸c˜ao, conclui-se que

*P−*1*BP* *m*+1=*P−*1*BmP**P−*1*BP**.*

Tendo presente a propriedade associativa da multiplica¸c˜ao de matrizes, obtemos

*P−*1*BP* *m*+1=*P−*1*Bm**P P −*1 (*BP*)*.*

Por defini¸c˜ao de inversa e atendendo a que *In*(*BP*) = *BP*, temos

*P−*1*BP* *m*+1=*P−*1*Bm*(*BP*)*.*

Usando a propriedade associativa da multiplica¸c˜ao de matrizes e a defini¸c˜ao de potˆencia de uma matriz quadrada, conclui-se que

*P−*1*BP* *m*+1= *P−*1(*BmB*) *P* = *P−*1*Bm*+1*P.*

Dos argumentos acima expendidos resulta que *Ak* = *P−*1*BkP* e por conseguinte *Ak*e *Bk*s˜ao matrizes semelhantes.

Departamento de Matem´atica FCT-UNL ALGA 2017/18 – Uma resolu¸c˜ao do 1o Teste iii–iii

(b) Em primeiro lugar, vamos provar que: para toda a matriz invert´ıvel *Q ∈ Mn×n*(K) e para cada matriz *C ∈ Mn×n*(K), r(*QC*) = r(*C*). Seja *C ∈ Mn×n*(K). Suponhamos que *Q ∈ Mn×n*(K) e que *Q* ´e uma matriz invert´ıvel. Ent˜ao (de acordo com a mat´eria leccionada) existem matrizes elementares *F*1*, . . . , Fp ∈ Mn×n*(K) tais que *Q* = *F*1 *. . . Fp*. Assim temos que *C* e *F*1 *. . . FpC* = *QC* s˜ao equivalentes por linhas e por conseguinte r(*QC*) = r(*C*).

Fazendo uso deste resultado, tendo presente que *P−*1 ´e uma matriz invert´ıvel e que *A* = *P−*1*BP* = (*P−*1)*BP*, obtemos r(*A*) = r(*BP*). Por outro lado, atendendo a que (*BP*)*>* = *P>B>*, podemos concluir que

r(*BP*) = r(*P>B>*)*.*

Como *P>* ´e uma matriz invert´ıvel ent˜ao r(*P>B>*) = r(*B>*). Do exposto resulta que

r(*A*) = r(*BP*) = r(*P>B>*) = r(*B>*) = r(*B*)*.*