1–1

´Algebra Linear e inear e Geometria eometria Anal´ıtica nal´ıtica

Segundo Teste – 23 de Novembro de 2016

S´o ser˜ao consideradas as respostas devidamente justificadas.

[Cota¸c˜ao]

1. Considere os seguintes subespa¸cos de R4

*F* =(*a, b, c, d*) *∈* R4: *a* = *−b* + *c ∧ d* = 0*, G* =(*a, b, c, d*) *∈* R4: *a* = *d* + *c ∧ b* = 0*.*

[2,0] (a) Determine uma base e a dimens˜ao para o subespa¸co *F* e para o subespa¸co *G*. [0,5] (b) Indique uma sequˆencia geradora do subespa¸co *F* + *G*.

[1,5] (c) Justifique que dim(*F* + *G*) = 3 e determine dim(*F ∩ G*).

[2,0] (d) Indique, justificando, uma base de *F ∩ G*.

2. Considere a matriz *Ak ∈ M*4*×*4(R), com *k ∈* R:

*Ak* =



1 0 *−*1 0

0 *−*1 1 *k*

0 *k −k k*

*−*1 0 2 *k* + 2



*.*

[2,5] (a) Utilizando determinantes, indique o conjunto dos valores de *k* para os quais a matriz *Ak* ´e invert´ıvel. [3,0] (b) Para *k* = 3 determine, apresentando todos os c´alculos efectuados:

(i) det *Ak* (ii) (Adj*Ak*)34 (iii)*A−*1 *k*

3. Considere a base (*u*1*, u*2) de R2.

(a) Seja (*v*1*, v*2*, v*3) uma sequˆencia de vectores de R2

34, sem determinar *A−*1 *k*.

[1,5] . Justifique que esta sequˆencia n˜ao ´e linearmente independente.

(b) Justifique que a sequˆencia de R2(2*u*1*, u*1 + 3*u*2) ´e tamb´em uma base de R2

[1,5] .

4. Seja *B* = ((1*,* 0*,* 0)*,*(1*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 1*,* 1) uma base de R3e *f* : R3 *−→* R2 uma aplica¸c˜ao linear tal que: *f*(1*,* 0*,* 0) = (0*,* 1), *f*(1*,* 1*,* 0) = (2*,* 1) e *f*(1*,* 1*,* 1) = (*−*1*,* 0).

[1,0] (a) Escreva o vector (4*,* 3*,* 2) como combina¸c˜ao linear dos vectores da base *B*. [1,5] (b) Atendendo a que *f* ´e uma aplica¸c˜ao linear determine *f*(4*,* 3*,* 2)*.*

5. Seja *A ∈ Mm×n*(R)*,* com *m, n ∈* N*.* Sejam *B ∈ Mm×*1(R) uma matriz n˜ao nula

*F* = *{X ∈ Mn×*1(R) : *AX* = 0*m×*1*}* e *S* = *{X ∈ Mn×*1(R) : *AX* = *B}.*

[1,5] (a) Mostre que *F* ´e um subespa¸co vectorial de *Mn×*1(R)*.*

[1,5] (b) Assumindo que *X*0 *∈ Mn×*1(R) ´e uma solu¸c˜ao do sistema *AX* = *B,* mostre que *S* = *{X*0 + *X* : *X ∈ F}.*

✄ ✂

Fim

✁

Departamento de Matem´atica

i–iv

´Algebra Linear e inear e Geometria eometria Anal´ıtica nal´ıtica Segundo Teste – 23 de Novembro de 2016

Uma resolu¸c˜ao com notas explicativas

[2,0] 1. (a) Atendendo `a descri¸c˜ao de *F* podemos verificar que:

*F* =(*a, b, c, d*) *∈* R4: *a* = *−b* + *c ∧ d* = 0

= *{*(*−b* + *c, b, c,* 0) : *b, c ∈* R*}*

= *{*(*−b, b,* 0*,* 0) + (*c,* 0*, c,* 0) : *b, c ∈* R*}*

= *{b*(*−*1*,* 1*,* 0*,* 0) + *c*(1*,* 0*,* 1*,* 0) : *b, c ∈* R*}*

= *h*(*−*1*,* 1*,* 0*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 1*,* 0)*i.*

Logo ((*−*1*,* 1*,* 0*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 1*,* 0)) ´e uma sequˆencia geradora do subespa¸co *F* e ´e linearmente independente pois ´e composta apenas por dois vectores tais que nenhum deles ´e m´ultiplo escalar do outro. Ent˜ao ((*−*1*,* 1*,* 0*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 1*,* 0)) ´e uma base de *F* e, portanto, dim *F* = 2*.*

Pela forma como *G* est´a descrito temos que:

*G* =(*a, b, c, d*) *∈* R4: *a* = *d* + *c ∧ b* = 0

= *{*(*d* + *c,* 0*, c, d*) : *b, c ∈* R*}*

= *{*(*c,* 0*, c,* 0) + (*d,* 0*,* 0*, d*) : *c, d ∈* R*}*

= *{c*(1*,* 0*,* 1*,* 0) + *d*(1*,* 0*,* 0*,* 1) : *b, c ∈* R*}*

= *h*(1*,* 0*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 0*,* 1)*i.*

Logo ((1*,* 0*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 0*,* 1)) ´e uma sequˆencia geradora do subespa¸co *G* e ´e linearmente independente pois ´e composta apenas por dois vectores tais que nenhum deles ´e m´ultiplo escalar do outro. Ent˜ao ((1*,* 0*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 0*,* 1)) ´e uma base de *G* e, portanto, dim *G* = 2*.*

[0,5] (b) Sabemos que os geradores da soma de dois subespa¸cos *F* e *G* se podem obter pela jun¸c˜ao dos geradores de *F* com os geradores de *G*. Vimos na al´ınea anterior que ((*−*1*,* 1*,* 0*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 1*,* 0)) ´e uma sequˆencia geradora do subespa¸co *F* e ((1*,* 0*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 0*,* 1)) ´e uma sequˆencia geradora do subespa¸co *G* logo

((*−*1*,* 1*,* 0*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 0*,* 1))

´e uma sequˆencia geradora do subespa¸co *F* + *G.* Como o vector (1*,* 0*,* 1*,* 0) est´a repetido a sequˆencia ((*−*1*,* 1*,* 0*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 0*,* 1))

´e tamb´em uma sequˆencia geradora do subespa¸co *F* + *G.*

[1,5] (c) Vimos, na al´ınea anterior, que

((*−*1*,* 1*,* 0*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 0*,* 1))

´e uma sequˆencia geradora do subespa¸co *F* + *G.* Para que esta sequˆencia geradora seja uma base de *F* + *G* ´e necess´ario que seja linearmente independente. Disponhamos estes vectores numa matriz *A* e levemo-la `a forma de escada:

*A* =



*−*1 1 0 0

1 0 1 0

1 0 0 1



*−−−→ l*2+*l*1 *l*3+*l*1



*−*1 1 0 0

0 1 1 0 0 1 0 1



*−−−−−−−−→ l*3 + (*−*1)*l*2



*−*1 1 0 0

0 1 1 0 0 0 *−*1 1



(f.e.)*.*

Departamento de Matem´atica FCT-UNL ALGA 2016/17 – Uma resolu¸c˜ao do 2o Teste ii–iv

Como a caracter´ıstica de *A* ´e 3 ent˜ao a sequˆencia ((*−*1*,* 1*,* 0*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 0*,* 1)) ´e linearmente independente e, portanto, ´e uma base de *F* + *G*.

Note que a sequˆencia ((*−*1*,* 1*,* 0*,* 0)*,*(0*,* 1*,* 1*,* 0)*,*(0*,* 0*, −*1*,* 1)) tamb´em ´e uma base de *F* + *G* pois ´e linearmente independente, por ser constitu´ıda pelas trˆes linhas n˜ao nulas de uma matriz em forma de escada, e tamb´em gera *F* + *G.*

Assim dim(*F* + *G*) = 3*.*

O Teorema das dimens˜oes diz-nos que dim(*F* +*G*) = dim *F* + dim *G−* dim(*F ∩G*)*.* Atendendo a que dim(*F* + *G*) = 3 e que dim *F* = dim *G* = 2, obtemos 3 = 2 + 2 *−* dim(*F ∩ G*)*.* Concluimos assim que dim(*F ∩ G*) = 1.

[2,0] (d) Como (1*,* 0*,* 1*,* 0) *∈ F* e (1*,* 0*,* 1*,* 0) *∈ G,* pois ´e um dos geradores de *F* e tamb´em ´e um dos geradores de *G,* ent˜ao (1*,* 0*,* 1*,* 0) *∈ F ∩ G*.

Atendendo a que (1*,* 0*,* 1*,* 0) ´e um vector n˜ao nulo de *F ∩ G*, podemos afirmar que ´e linearmente independente. Uma vez que dim(*F ∩ G*) = 1, ent˜ao ((1*,* 0*,* 1*,* 0)) ´e uma base de *F ∩ G*.

[2,5] 2. (a) Como

1 0 *−*1 0

0 *−*1 1 *k* 0 *k −k k −*1 0 2 *k* + 2

=*l*3+*kl*2 *l*4+*l*1

1 0 *−*1 0

0 *−*1 1 *k* 0 0 0 *k* + *k*2 0 0 1 *k* + 2

= *l*3 *←→ l*4*−*1 0 *−*1 0

0 *−*1 1 *k*

0 0 1 *k* + 2

0 0 0 *k* + *k*2

e o determinante de uma matriz triangular superior ´e dado pelo produto dos elementos da sua diagonal principal vem,

det *Ak* = *−*(1 *·* (*−*1) *·* 1 *·* (*k* + *k*2)) = *k* + *k*2 = *k ·* (1 + *k*)*.*

Ora *Ak* ´e invert´ıvel se, e s´o se, det *Ak 6*= 0*.* Como

*k ·* (1 + *k*) *6*= 0 *⇔ k 6*= 0 *∧ k 6*= *−*1

ent˜ao o conjunto dos valores de *k* para os quais a matriz *Ak* ´e invert´ıvel ´e R *\ {−*1*,* 0*}.* [3,0] (b) Para *k* = 3 vem:

(i) det *Ak* = *k ·* (1 + *k*) = 3 *·* (1 + 3) = 3 *·* 4 = 12;

1 0 0

(ii) (Adj *Ak*)34 =

*A*c*k>* 34=*A*c*k* 43= (*−*1)4+3*·* det *Ak*(4*|*3) = *−*1 *·* *−*1 *k*

0 *−*1 *k* 0 *k k*

= *−*1 *·* 1 *·* (*−*1)1+1*·*

*k k*

= *−*1 *·* (*−*1 *· k − k · k*) = *k* + *k*2 = 3 + 32 = 3 + 9 = 12;

(iii) *A−*1 *k*

det *Ak·* (Adj *Ak*)34 =112*·* 12 = 1*.* 34 =1

3. (a) A dimens˜ao de R2

[1,5] ´e 2 e, portanto, qualquer sequˆencia linearmente independente tem, no m´aximo, 2 vectores. Logo a sequˆencia (*v*1*, v*2*, v*3) n˜ao pode ser linearmente independente pois ´e composta por 3 vectores.

[1,5] (b) Em rela¸c˜ao `a base (*u*1*, u*2), a sequˆencia das coordenadas de:

2*u*1 ´e (2*,* 0)*,*

*u*1 + 3*u*2 ´e (1*,* 3)*.*

Departamento de Matem´atica FCT-UNL ALGA 2016/17 – Uma resolu¸c˜ao do 2o Teste iii–iv

Tem-se

*A* =

com

"2 0 1 3

#

*−−−−−−−−→ l*2 + (*−* 12)*l*1 r(*A*) = 2

"2 0 0 3

#

(f.e.)

e, portanto, a sequˆencia ((2*,* 0)*,*(1*,* 3)) ´e linearmente independente. Assim a sequˆencia (2*u*1*, u*1 + 3*u*2) tamb´em ´e linearmente independente e, como estamos num espa¸co vectorial de dimens˜ao 2*,* ´e uma base de R2*.*

Resolu¸c~ao alternativa:

Tendo em conta que as sequˆencias de vectores resultantes de transforma¸c˜oes de tipo elementar geram o mesmo subespa¸co gerado pela sequˆencia incial temos:

R2 = *hu*1*, u*2*i* = *hu*1*,* 3*u*2*i* = *hu*1*, u*1 + 3*u*2*i* = *h*2*u*1*, u*1 + 3*u*2*i.*

Assim a sequˆencia (2*u*1*, u*1 + 3*u*2) gera R2e como ´e composta por dois vectores, e estamos num espa¸co de dimens˜ao dois, ´e tamb´em uma base de R2*.*

[1,0] 4. (a) Determinemos a sequˆencia das coordenadas de (4*,* 3*,* 2) na base *B*. Ora

(4*,* 3*,* 2) = *α*1 *·* (1*,* 0*,* 0) + *α*2 *·* (1*,* 1*,* 0) + *α*3 *·* (1*,* 1*,* 1)

= (*α*1*,* 0*,* 0) + (*α*2*, α*2*,* 0) + (*α*3*, α*3*, α*3)

= (*α*1 + *α*2 + *α*3*, α*2 + *α*3*, α*3)*.*

Logo 

*α*1 + *α*2 + *α*3 = 4 *α*2 + *α*3 = 3

*α*3 = 2

*⇔*

 

*α*1 = 1 *α*2 = 1 *α*3 = 2

*.*

Tem-se, pois, um sistema de equa¸c˜oes lineares nas inc´ognitas *α*1*, α*2*, α*3, cuja solu¸c˜ao ´unica ´e (1*,* 1*,* 2)*.* Assim a sequˆencia das coordenadas do vector (4*,* 3*,* 2) na base *B* ´e (1*,* 1*,* 2)*,* isto ´e,

(4*,* 3*,* 2) = 1 *·* (1*,* 0*,* 0) + 1 *·* (1*,* 1*,* 0) + 2 *·* (1*,* 1*,* 1)*.*

[1,5] (b) Como a aplica¸c˜ao *f* ´e linear, ent˜ao *f*((*x, y, z*) + (*a, b, c*)) = *f*(*x, y, z*) + *f*(*a, b, c*), para quaisquer (*x, y, z*)*,* (*a, b, c*) *∈* R3*,* e *f*(*β ·*(*x, y, z*)) = *β · f*(*x, y, z*), para quaisquer *β ∈* R e (*x, y, z*) *∈* R3. Assim,

*f*(4*,* 3*,* 2) = *f*(1 *·* (1*,* 0*,* 0) + 1 *·* (1*,* 1*,* 0) + 2 *·* (1*,* 1*,* 1))

= *f*(1 *·* (1*,* 0*,* 0)) + *f*(1 *·* (1*,* 1*,* 0)) + *f*(2 *·* (1*,* 1*,* 1))

= 1 *· f*(1*,* 0*,* 0) + 1 *· f*(1*,* 1*,* 0) + 2 *· f*(1*,* 1*,* 1)

= 1 *·* (0*,* 1) + 1 *·* (2*,* 1) + 2 *·* (*−*1*,* 0)

= (0*,* 1) + (2*,* 1) + *·*(*−*2*,* 0)

= (0*,* 2)*.*

5. (a) 1- Pela forma como *F* est´a definido temos *F ⊆ Mn×*1(R)*.*

2- Pelas propriedades do produto de matrizes temos *A ·* 0*n×*1 = 0*m×*1 e, portanto, 0*n×*1 *∈ F.*

Departamento de Matem´atica FCT-UNL ALGA 2016/17 – Uma resolu¸c˜ao do 2o Teste iv–iv

3- Sejam *X*1*, X*2 *∈ F.* Vejamos que *X*1 + *X*2 *∈ F.*

Como *X*1*, X*2 *∈ F* ent˜ao *AX*1 = 0*m×*1 e *AX*2 = 0*m×*1*.* Logo, pelas propriedades da adi¸c˜ao e multiplica¸c˜ao de matrizes, vem

*A*(*X*1 + *X*2) = *AX*1 + *AX*2 = 0*m×*1 + 0*m×*1 = 0*m×*1

e, portanto, *X*1 + *X*2 *∈ F.*

4- Sejam *X ∈ F* e *β ∈* R*.* Vejamos que *βX ∈ F.*

Como *X ∈ F* ent˜ao *AX* = 0*m×*1*.* Logo, pelas propriedades do produto de um escalar por uma matriz, vem

*A*(*βX*) = *β*(*AX*) = *β*0*m×*1 = 0*m×*1

e, portanto, *βX ∈ F.*

Assim, por 1, 2, 3 e 4, *F* ´e subespa¸co de *Mn×*1(R)*.*

(b) Como *X*0 *∈ Mn×*1(R) ´e uma solu¸c˜ao do sistema *AX* = *B* ent˜ao *AX*0 = *B.*

Seja *X ∈ F* e vejamos que *X*0 + *X ∈ S.*

Como *X ∈ F* ent˜ao *AX* = 0*m×*1*.* Ent˜ao, pelas propriedades da adi¸c˜ao e multiplica¸c˜ao de matrizes, *A*(*X*0 + *X*) = *AX*0 + *AX* = *B* + 0*m×*1 = *B.*

Logo *X*0 + *X ∈ S* e, portanto, como a escolha de *X ∈ F* foi arbitr´aria,

*{X*0 + *X* : *X ∈ F} ⊆ S.*

Seja agora *X ∈ S* arbitr´ario. Vejamos que existe *X0 ∈ F* tal que *X* = *X*0 + *X0.*

Como *X ∈ S* ent˜ao *AX* = *B.* Consideremos *X0* = *X − X*0 *∈ Mn×*1(R) e vejamos que *X0 ∈ F.* Ora, pelas propriedades da adi¸c˜ao e multiplica¸c˜ao de matrizes,

*AX0* = *A*(*X − X*0) = *AX − AX*0 = *B − B* = 0*m×*1

e, portanto, *X0 ∈ F.* Mas

*X*0 + *X0* = *X*0 + (*X − X*0) = [*X*0 + (*−X*0)] + *X* = 0*n×*1 + *X* = *X*

donde podemos concluir que

*S ⊆ {X*0 + *X* : *X ∈ F}.*

Por *{X*0 + *X* : *X ∈ F} ⊆ S* e *S ⊆ {X*0 + *X* : *X ∈ F}* vem

*S* = *{X*0 + *X* : *X ∈ F}.*