Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 4 - Espa¸cos Vectoriais

*Departamento de Matem´atica*

*FCT/UNL*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 1 / 70

Programa

1 Matrizes

2 Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

3 Determinantes

4 Espa¸cos Vectoriais

5 Aplica¸c˜oes Lineares

6 Valores e Vectores Pr´oprios

7 Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto

8 Geometria Anal´ıtica

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 2 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

4.1 Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

Defini¸c˜ao

Seja *E* um conjunto n˜ao vazio e K *∈ {*R*,* C*}*. Suponhamos definidas duas opera¸c˜oes:

uma que designamos por adi¸c˜ao em *E* que ´e uma opera¸c˜ao bin´aria:

+ :*E × E → E*

(*a, b*) *7→ a* + *b*

outra opera¸c˜ao, que denominamos multiplica¸c˜ao externa:

*·* :K *× E → E*

(*α, u*) *7→ α · u* (ou simplesmente *αu*)

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 3 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

4.1 Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

*Dizemos que E, com estas duas opera¸c˜oes, ´e um espa¸co vectorial sobre* K *ou que* (*E,* +*, ·*) *´e um* espa¸co vectorial *sobre* K *se*

1 *A adi¸c˜ao tem as propriedades:*

(*A*1) *u* + *v* = *v* + *u.*

(*A*2) (*u* + *v*) + *w* = *u* + (*v* + *w*)*.*

(*A*3) *Existe* 0*E ∈ E tal que para qualquer u ∈ E se tem*

*u* + 0*E* = 0*E* + *u* = *u.*

(*A*4) *Para cada u ∈ E existe−u ∈ E tal que u* + (*−u*) = *−u* + *u* ==*E . para quaisquer u, v,w ∈ E.*

2 *A multiplica¸c˜ao externa goza das seguintes propriedades:* (*M*1) *α*(*u* + *v*) = *αu* + *αv.*

(*M*2) (*α* + *β*)*u* = *αu* + *βu.*

(*M*3) (*αβ*)*u* = *α*(*βu*)*.*

(*M*4) 1*u* = *u,*

*para quaisquer u, v ∈ E e quaisquer α, β ∈* K*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 4 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

4.1 Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

Defini¸c˜ao

*aos elementos de E chamamos vectores*

*aos elementos de* K *chamamos escalares*

*se* K = C *dizemos que E ´e um espa¸co vectorial complexo*

*se* K = R *dizemos que E ´e um espa¸co vectorial real*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 5 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

4.1 Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

Exemplo

K *´e um espa¸co vectorial sobre* K*, com as opera¸c˜oes usuais de adi¸c˜ao e multiplica¸c˜ao de elementos de* K*.*

*Assim*

R *´e um espa¸co vectorial sobre* R

*e*

C *´e um espa¸co vectorial sobre* C*.*

*Note que*

C *´e um espa¸co vectorial sobre* R

*mas*

R *n˜ao ´e um espa¸co vectorial sobre* C*. (Porquˆe?)*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 6 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

4.1 Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

Exemplo

*Mm×n*(K)*, com a opera¸c˜ao de adi¸c˜ao usual de matrizes e com a opera¸c˜ao de multiplica¸c˜ao de um elemento de* K *por uma matriz, definidas no Cap´ıtulo 1, ´e um espa¸co vectorial sobre* K*.*

K*n, com a opera¸c˜ao usual de adi¸c˜ao de n-uplos, dada por*

*∀*(*a*1*,...,an*)*,*(*b*1*,...,bn*)*∈*K*n* (*a*1*, . . . , an*)+(*b*1*, . . . , bn*) = (*a*1+*b*1*, . . . , an*+*bn*)

*e com a opera¸c˜ao de multiplica¸c˜ao de um escalar por um n-uplo dada por*

*∀α∈*K *∀*(*a*1*,...,an*)*∈*K*n α·*(*a*1*, . . . , an*) = (*αa*1*, . . . , αan*)*,*

*´e um espa¸co vectorial sobre* K*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 7 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

Exemplo

K*n*[*x*]*, o conjunto de todos os polin´omios na vari´avel x, com coeficientes em* K*, de grau menor ou igual a n, com n ∈* N0*, isto ´e,*

K*n*[*x*] = *{anxn* + *· · ·* + *a*1*x* + *a*0 : *an, . . . , a*1*, a*0 *∈* K*}.*

K*n*[*x*] *com as opera¸c˜ao de adi¸c˜ao usual de polin´omios, dada por ∀*(*anxn*+*···*+*a*1*x*+*a*0)*,*(*bnxn*+*···*+*b*1*x*+*b*0)*∈*K*n*[*x*]

(*anxn* + *· · ·* + *a*1*x* + *a*0)+(*bnxn* + *· · ·* + *b*1*x* + *b*0) =

= (*an* + *bn*)*xn* + *· · ·* + (*a*1 + *b*1)*x* + (*a*0 + *b*0)

*e com a multiplica¸c˜ao usual de um escalar por um polin´omio, dada por ∀α∈*K *∀*(*anxn*+*···*+*a*1*x*+*a*0)*∈*K*n*[*x*]

*α·*(*anxn* + *· · ·* + *a*1*x* + *a*0) = (*αan*)*xn* + *· · ·* + (*αa*1)*x* + (*αa*0)*, ´e um espa¸co vectorial sobre* K*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 8 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

4.1 Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

Exemplo

K[*x*] *- o conjunto de todos os polin´omios na vari´avel x, com coeficientes em* K *(sem restri¸c˜ao ao grau);*

K[*x*] *com as opera¸c˜oes usuais de adi¸c˜ao de polin´omios e de multiplica¸c˜ao de um escalar por um polin´omio constitui um espa¸co vectorial sobre* K*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 9 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

Exemplo

*A - o conjunto dos pontos do plano (ou do espa¸co).*

*vector−→AB - o segmento orientado com origem no ponto A e extremidade final no ponto B (A e B de A);*

*VA - o conjunto dos vectores aplicados com origem no ponto A. VA com a adi¸c˜ao dada pela regra do paralelogramo:*

*C D*

*.....................*

*...........*

✏✏✏✏✏✏✏✏✶

✒

*−→AB* +*−→AC* =*−→AD*

✏✏✏✏

✲

*A B*

*e multiplica¸c˜ao externa que a cada real α e a cada vector−→AB associa o vector α−→AB cuja direc¸c˜ao ´e a do vector−→AB,o sentido ´e o de−→AB se α >* 0 *e ´e o contr´ario se α <* 0 *(se α* = 0 *ent˜ao−→AB* =*−→*0 *) e cujo comprimento ´e kα−→ABk* = *|α| k−→ABk*

*´e um espa¸co vectorial sobre* R *(isto ´e, um espa¸co vectorial real).* Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 10 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Espa¸cos Vectoriais: defini¸c˜ao, exemplos e propriedades

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial sobre* K *e seja α ∈* K *e u ∈ E. Tem-se:* 1 *O elemento neutro da adi¸c˜ao em E ´e ´unico ( representa-se por* 0*E );* 2 *Para cada u ∈ E, o oposto de u, para a adi¸c˜ao em E ´e ´unico (o oposto para a adi¸c˜ao de u ∈ E representa-se por −u);*

3 *α*0*E* = 0*E ;*

4 0K*u* = 0*E ;*

5 *Se αu* = 0*E ent˜ao α* = 0 *ou u* = 0*E .*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 11 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Subespa¸cos vectoriais

4.2 Subespa¸cos vectoriais

Defini¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial sobre* K*. Um subconjunto F de E diz-se um subespa¸co vectorial de E, ou simplesmente um subespa¸co de E, se F ´e tamb´em um espa¸co vectorial sobre* K *com as opera¸c˜oes nele naturalmente definidas por ser subconjunto de E (a que chamamos as opera¸c˜oes induzidas pelas opera¸c˜oes de E no conjunto F).*

Teorema

*Seja E um espa¸co vectorial sobre* K*. Tem-se que F ´e um subespa¸co de E se, e s´o se, satisfizer as condi¸c˜oes seguintes:*

1 *F ⊆ E*

2 0*E ∈ F (ou F 6*= *∅)*

3 *∀u,v∈F u* + *v ∈ F*

4 *∀α∈*K *∀u∈F αu ∈ F*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 12 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Subespa¸cos vectoriais

Exemplos

*Consideremos o espa¸co vectorial* R2*. Facilmente se verifica que s˜ao subespa¸cos de* R2*:*

1 *F* =(*x, y*) *∈* R2: *y* = 0= *{*(*x,* 0) : *x ∈* R*} (eixo OX)* 2 *G* = *{*(0*, y*) : *y ∈* R*} (eixo OY )* 3 *H* =(*x, y*) *∈* R2: *x* = *y(bissectriz dos quadrantes ´ımpares)* 4 *L* =(*x, y*) *∈* R2: *x* = *−y(bissectriz dos quadrantes pares)* 5 *Para cada m ∈* R*,*

*Rm* =(*x, y*) *∈* R2: *y* = *mx(recta que passa na origem e tem declive m)*

*No entanto*

1 *Rm,b* =(*x, y*) *∈* R2: *y* = *mx* + *b, com m, b ∈* R*, b 6*= 0 *(recta, com declive m, que n˜ao passa na origem)*

2 *M* =(*x, y*) *∈* R2: *x 6*= *y*

*n˜ao s˜ao subespa¸cos de* R2*. (Porquˆe?)*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 13 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Subespa¸cos vectoriais

Exemplos

*Consideremos o espa¸co vectorial Mn×n*(K)*.*

*S˜ao exemplos de subespa¸cos de Mn×n*(K) *o conjunto das matrizes de Mn×n*(K)*:*

1 *Triangulares superiores;*

2 *Triangulares inferiores;*

3 *Diagonais;*

4 *Escalares;*

5 *Sim´etricas;*

6 *Hemi-sim´etricas;*

7 *Com a diagonal principal nula.*

*N˜ao s˜ao subespa¸cos de Mn×n*(K) *o conjunto das matrizes de Mn×n*(K)*:* 1 *Invert´ıveis;*

2 *Com a diagonal principal com pelo menos um elemento n˜ao nulo.* Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 14 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Subespa¸cos vectoriais

4.2 Subespa¸cos vectoriais

Exemplos

*Seja* K[*x*] *o conjunto dos polin´omios, na vari´avel x, com coeficientes em* K*. O conjunto dos polin´omios de* K[*x*] *de grau inferior ou igual a r, com r ∈* N*, ´e um subespa¸co de* K[*x*]*.*

*O conjunto dos polin´omios de* K[*x*] *de grau igual a r, com r ∈* N*, n˜ao ´e um subespa¸co de* K[*x*]*.*

Proposi¸c˜ao (Subespa¸cos triviais)

*Se E ´e um espa¸co vectorial sobre* K *ent˜ao E e {*0*E } s˜ao subespa¸cos vectoriais de E.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 15 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

4.3 Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

Defini¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial sobre* K *e sejam u*1*, . . . , ur elementos de E.Dizemos que v ∈ E ´e combina¸c˜ao linear dos vectores u*1*, . . . , ur se existem escalares α*1*, . . . , αr ∈* K *(n˜ao necessariamente ´unicos) tais que*

*v* = *α*1*u*1 + *· · ·* + *αrur.*

*Aos escalares α*1*, . . . , αr chamamos os coeficientes da combina¸c˜ao linear e a* (*α*1*, . . . , αr*) *a sequˆencia dos coeficientes da combina¸c˜ao linear.*

Exemplo

1 0*E ´e combina¸c˜ao linear de quaisquer vectores u*1*, . . . , ur de um espa¸co vectorial E pois*

0*E* = 0*u*1 + *· · ·* + 0*ur.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 16 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

Exemplos

1 *Qualquer vector de* R3 *´e combina¸c˜ao linear dos vectores* (1*,* 0*,* 0)*,*(0*,* 1*,* 0)*,*(0*,* 0*,* 1) *∈* R3 *pois*

*∀*(*a,b,c*)*∈*R3 (*a, b, c*) = *a*(1*,* 0*,* 0) + *b*(0*,* 1*,* 0) + *c*(0*,* 0*,* 1)*.*

2 *Mais geralmente, qualquer vector de* K*n ´e combina¸c˜ao linear dos vectores*

*e*1*, . . . , en*

*em que ei, i* = 1*, . . . , n, ´e o n-uplo com todas as componentes iguais a 0, excepto a i-´esima componente que ´e igual a 1, i. e.,*

*e*1 = (1*,* 0*, . . . ,* 0)*,*

*e*2 = (0*,* 1*,* 0*, . . . ,* 0)*,*

*... · · ·*

*en* = (0*, . . . ,* 0*,* 1)*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 17 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

4.3 Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

Exemplo

1 *Em* R2 *o vector* (3*,* 3) *´e combina¸c˜ao linear dos vectores* (1*,* 1)*,* (2*,* 2)*. Os coeficientes da combina¸c˜ao linear n˜ao s˜ao ´unicos pois*

(3*,* 3) = 3(1*,* 1) + 0(2*,* 2)*,*

(3*,* 3) = 1(1*,* 1) + 1(2*,* 2)*,*

(3*,* 3) = 7(1*,* 1) + (-2)(2*,* 2)*.*

*De facto, ´e suficiente que em* (3*,* 3) = *α*1(1*,* 1) + *α*2(2*,* 2) *se tenha α*1 + 2*α*2 = 3*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 18 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial e u*1*, . . . , ur elementos de E. O conjunto de todas as combina¸c˜oes lineares dos vectores u*1*, . . . , ur, isto ´e,*

*{α*1*u*1 + *· · ·* + *αrur*: *α*1*, . . . , αr ∈* K*},*

*´e um subespa¸co de E.*

Defini¸c˜ao

*Sejam u*1*, . . . , ur elementos de um espa¸co vectorial E. Chamamos subespa¸co (de E) gerado pela sequˆencia* (*u*1*, . . . , ur*) *ou pelos vectores u*1*, . . . , ur ao conjunto de todas as combina¸c˜oes lineares dos vectores u*1*, . . . , ur. Tal subespa¸co ´e frequentemente denotado por hu*1*, . . . , uri, isto ´e,*

*hu*1*, . . . , uri* = *{α*1*u*1 + *· · ·* + *αrur*: *α*1*, . . . , αr ∈* K*}.*

*Se F* = *hu*1*, . . . , uri dizemos, ainda, que u*1*, . . . , ur geram F ou que u*1*, . . . , ur s˜ao geradores de F ou que a sequˆencia* (*u*1*, . . . , ur*) *´e geradora de F.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 19 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

4.3 Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

Exemplos

1 *Quaisquer que sejam u*1*, . . . , ur vectores de um espa¸co vectorial E tem-se*

0*E ∈ hu*1*, . . . , uri*

*e, para i ∈ {*1*, . . . ,r},*

*ui ∈ hu*1*, . . . , uri.*

2 R3 = *h*(1*,* 0*,* 0)*,*(0*,* 1*,* 0)*,*(0*,* 0*,* 1)*i.*

3 K*n* = *he*1*, . . . , eni sendo ei ∈* K*n o n-uplo com todas as componentes nulas excepto a i-´esima componente que ´e igual a 1, i* = 1*, . . . , n.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 20 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

Exemplos

1 *Mm×n*(K) = *hE*11*, E*12*, . . . , E*1*n, E*21*, E*22*, . . . , E*2*n, . . . , Em*1*, Em*2*, . . . , Emni em que Eij ´e a matriz de Mm×n*(K) *com todas as entradas nulas excepto a entrada* (*i, j*) *que ´e igual a* 1*, i* = 1*, . . . , m, j* = 1*, . . . , n.*

2 *F* =(*a, b, c*) *∈* R3: *a* = 2*b* + *c´e um subespa¸co de* R3*. Observemos que*

*F* = *{*(2*b* + *c, b, c*) : *b, c ∈* R*}*

*e que*

(2*b* + *c, b, c*) = *b*(2*,* 1*,* 0) + *c*(1*,* 0*,* 1)

*donde*

*F* = *h*(2*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 1)*i.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 21 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

Exemplos

1 K*n*[*x*] = *hxn, xn−*1*, . . . , x,* 1*i pois*

*∀anxn*+*···*+*a*1*x*+*a*0*∈*K*n*[*x*] *anxn*+*· · ·*+*a*1*x*+*a*0 = *an ·xn*+*· · ·*+*a*1 *·x*+*a*0 *·*1*.*

2 *Em* R2*, considerem-se os vectores*

(1*,* 0)*,*(0*,* 1)*,*(*−*1*,* 3)*,*(*−*3*,* 4)*.*

*Tem-se*

R2 = *h*(1*,* 0)*,*(0*,* 1)*,*(*−*1*,* 3)*,*(*−*3*,* 4)*i*

R2 = *h*(1*,* 0)*,*(0*,* 1)*,*(*−*1*,* 3)*i*

R2 = *h*(1*,* 0)*,*(0*,* 1)*i*

*h*(1*,* 0)*i* = *{*(*x,* 0) : *x ∈* R*}* $R2*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 22 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

Defini¸c˜ao

*Um espa¸co vectorial E diz-se finitamente gerado se existem r ∈* N *e u*1*, . . . , ur ∈ E tais que*

*E* = *hu*1*, . . . , uri.*

Exemplos

*de espa¸cos finitamente gerados:* K*n,Mm×n*(K)*,* K*n*[*x*]*,VA;*

K[*x*] *(o conjunto dos polin´omios, na vari´avel x, com coeficientes em* K*, sem restri¸c˜ao ao grau) n˜ao ´e de dimens˜ao finita.*

*Porquˆe?:se* K[*x*] *tivesse dimens˜ao finita*

*∃r∈*N *∃p*1(*x*)*,...,pr* (*x*)*∈*K[*x*] K[*x*] = *hp*1(*x*)*, . . . , pr*(*x*)*i.*

*Seja k o m´aximo grau dos polin´omios p*1(*x*)*, . . . , pr*(*x*)*.*

*Qualquer polin´omio com grau superior a k n˜ao se pode escrever como combina¸c˜ao linear dos polin´omios p*1(*x*)*, . . . , pr*(*x*) *e, portanto, hp*1(*x*)*, . . . , pr*(*x*)*i*$K[*x*] *(contradi¸c˜ao).*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 23 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial e sejam u*1*, . . . , ur e v*1*, . . . , vs vectores de E. Tem-se*

1 *hu*1*, . . . , uri ⊆ hv*1*, . . . , vs i*

*se, e s´o se, para todo i ∈ {*1*, . . . ,r}, ui ´e combina¸c˜ao linear dos vectores v*1*, . . . , vs.*

2 *hu*1*, . . . , uri* = *hv*1*, . . . , vs i*

*se, e s´o se, para todo i ∈ {*1*, . . . ,r}, ui ´e combina¸c˜ao linear dos vectores v*1*, . . . , vs e para todo j ∈ {*1*, . . . ,s}, vj ´e combina¸c˜ao linear dos vectores u*1*, . . . , ur.*

Proposi¸c˜ao

*Se u*1*, . . . , ur s˜ao vectores de um espa¸co vectorial E e existe i ∈ {*1*, . . . ,r} tal que ui ´e combina¸c˜ao linear dos restantes r −* 1 *vectores ent˜ao*

*hu*1*, . . . , ui−*1*, ui, ui*+1*, . . . , uri* = *hu*1*, . . . , ui−*1*, ui*+1*, . . . , uri.* Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 24 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

4.3 Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

*Se uma sequˆencia de vectores de E inclui o vector* 0*E , tal vector pode ser “eliminado” da sequˆencia que o subespa¸co gerado por esses vectores n˜ao se altera.*

Proposi¸c˜ao

*Seja S* = (*u*1*, . . . , ur*) *uma sequˆencia de vectores de um espa¸co vectorial E e seja S0* = (*u0*1*, . . . , u0r*) *uma sequˆencia que se obtenha de S efectuando um n´umero finito de transforma¸c˜oes dos seguintes tipos:*

(I) *Troca de ordem na sequˆencia dos vectores ui e uj, com i 6*= *j.* (II) *Multiplica¸c˜ao do vector ui, i ∈ {*1*, . . . ,r}, por α ∈* K *\ {*0*}.* (III) *Substitui¸c˜ao do vector ui, i ∈ {*1*, . . . ,r}, por ui* + *βuj, com j ∈ {*1*, . . . ,r}, j 6*= *i e β ∈* K*.*

*Ent˜ao*

*hu*1*, . . . , uri* = *hu0*1*, . . . , u0ri.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 25 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

4.3 Combina¸c˜ao linear de vectores e subespa¸co gerado

Observa¸c˜ao

De acordo com o resultado anterior, se tivermos *m* vectores de K*n*e os tomarmos como linhas de uma matriz *A ∈ Mm×n*(K), podemos efectuar na matriz quaisquer transforma¸c˜oes elementares sobre linhas, em n´umero finito, que o subespa¸co (de K*n*) gerado pelas linhas n˜ao se altera, isto ´e,se

*A −−−−−−−→* (*linhas*)*A0*

ent˜ao o subespa¸co gerado pelas linhas da matriz *A* ´e igual ao subespa¸co gerado pelas linhas da matriz *A0*.

Em particular, podemos transformar *A* numa matriz *A0*em forma de escada e garantir que as linhas n˜ao nulas de *A0* geram o mesmo subespa¸co de K*n* que as linhas da matriz *A*.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 26 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Dependˆencia e independˆencia linear

4.4 Dependˆencia e independˆencia linear

Defini¸c˜ao

Seja *E* um espa¸co vectorial. Sejam *u*1*, . . . , ur ∈ E*, com *r ∈* N. Para *r* = 1, dizemos que a sequˆencia (*u*1) ou que o vector *u*1 ´e linearmente dependente quando *u*1 = 0*E* .

Para *r ≥* 2 dizemos que (*u*1*, . . . , ur*) ´e uma sequˆencia linearmente dependente, ou que os vectores *u*1*, . . . , ur* s˜ao linearmente dependentes,quando pelo menos um dos vectores da sequˆencia ´e combina¸c˜ao linear dos restantes vectores.

A uma sequˆencia (*u*1*, . . . , ur*) que n˜ao ´e linearmente dependente chamamos linearmente independente e dizemos que os vectores *u*1*, . . . , ur* s˜ao linearmente independentes.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 27 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Dependˆencia e independˆencia linear

4.4 Dependˆencia e independˆencia linear

*Nota: Dois vectores s˜ao linearmente dependentes se, e s´o se, um dos vectores ´e* m´ultiplo escalar *do outro, isto ´e, se ´e igual ao produto de um escalar pelo outro vector.*

Teorema (Crit´erio de Independˆencia Linear)

*Seja E um espa¸co vectorial sobre* K *e sejam u*1*, . . . , ur vectores de E. Os vectores u*1*, . . . , ur s˜ao linearmente independentes se, e s´o se,a ´unica forma de escrever* 0*E como combina¸c˜ao linear dos vectores u*1*, . . . , ur ´e tomando todos os coeficientes da combina¸c˜ao linear iguais a zero, isto ´e, se, e s´o se,*

*α*1*u*1 + *· · ·* + *αrur* = 0*E*=*⇒α*1 = *· · ·* = *αr* = 0*.*

*Tal equivale a afirmar que os vectores u*1*, . . . , ur s˜ao linearmente dependentes se, e s´o se,existem α*1*, . . . , αr ∈* K *n˜ao todos nulos tais que*

*α*1*u*1 + *· · ·* + *αrur* = 0*E .*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 28 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Dependˆencia e independˆencia linear

Exemplos

1 *Em* R3*, a sequˆencia* ((1*,* 0*,* 0)*,*(0*,* 1*,* 0)*,*(0*,* 0*,* 1)) *´e linearmente independente.*

2 *Em* K*n, a sequˆencia* (*e*1*, . . . , en*) *´e linearmente independente.* 3 *Em Mm×n*(K)*, a sequˆencia*

(*E*11*, E*12*, . . . , E*1*n, E*21*, E*22*, . . . , E*2*n, . . . , Em*1*, Em*2*, . . . , Emn*) *´e linearmente independente.*

4 *No espa¸co vectorial F* =(*a, b, c*) *∈* R3: *a* = 2*b* + *c, a sequˆencia* ((2*,* 1*,* 0)*,*(1*,* 0*,* 1)) *´e linearmente independente.*

5 *Em* K*n*[*x*]*, a sequˆencia* (*xn, xn−*1*, . . . , x,* 1) *´e linearmente independente.*

6 *Em* R2*,*

((1*,* 0)*,*(0*,* 1)*,*(*−*1*,* 3)*,*(*−*3*,* 4)) *´e uma sequˆencia linearmente*

*dependente.*

((1*,* 0)*,*(0*,* 1)*,*(*−*1*,* 3)) *´e uma sequˆencia linearmente dependente.* ((1*,* 0)*,*(0*,* 1)) *´e uma sequˆencia linearmente independente.*

((1*,* 0)) *´e uma sequˆencia linearmente independente.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 29 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Dependˆencia e independˆencia linear

4.4 Dependˆencia e independˆencia linear

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial e sejam u*1*, . . . , ur vectores de E. Os vectores u*1*, . . . , ur s˜ao linearmente independentes se, e s´o se,para todo o vector que se possa escrever como combina¸c˜ao linear de u*1*, . . . , ur (isto ´e, vector de hu*1*, . . . , uri) os coeficientes da combina¸c˜ao linear s˜ao ´unicos.*

Proposi¸c˜ao

*Seja S* = (*u*1*, . . . , ur*) *uma sequˆencia de vectores de um espa¸co vectorial E e seja S0* = (*u0*1*, . . . , u0r*) *uma sequˆencia que se obtenha de S efectuando um n´umero finito de transforma¸c˜oes dos tipos (I), (II), (III) descritos anteriormente.*

*Tem-se, S ´e linearmente dependente (respectivamente, independente) se, e s´o se, S0 ´e linearmente dependente (respectivamente, independente).*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 30 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Dependˆencia e independˆencia linear

4.4 Dependˆencia e independˆencia linear

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial e sejam u*1*, . . . , ur vectores de E linearmente independentes. Se v ∈ E ´e tal que v n˜ao ´e combina¸c˜ao linear dos vectores u*1*, . . . , ur, ent˜ao*

*u*1*, . . . , ur, v s˜ao linearmente independentes*

*e*

*hu*1*, . . . , uri* $ *hu*1*, . . . , ur, vi.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 31 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Bases e dimens˜ao

4.5 Bases e dimens˜ao

Defini¸c˜ao

Seja *E* um espa¸co vectorial e (*u*1*, . . . , un*) uma sequˆencia de vectores de *E*. Dizemos que (*u*1*, . . . , un*) ´e uma base de *E* se ´e uma sequˆencia geradora de *E* e linearmente independente.

Convenciona-se que se *E* = *{*0*E }* ent˜ao o conjunto vazio ´e base de *E*.

Observa¸c˜ao

Em R2, tem-se:

((1*,* 0)*,*(0*,* 1)) ´e uma sequˆencia geradora de R2e ´e linearmente independente.

((1*,* 0)*,*(0*,* 1)*,*(*−*1*,* 3)) ´e uma sequˆencia geradora de R2 mas n˜ao ´e linearmente independente.

((1*,* 1)*,*(2*,* 2)) n˜ao ´e geradora de R2e n˜ao ´e linearmente independente. ((1*,* 1)) n˜ao ´e geradora de R2 mas ´e linearmente independente.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 32 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Bases e dimens˜ao

Proposi¸c˜ao

*Num espa¸co vectorial E finitamente gerado qualquer sequˆencia geradora de E tem um n´umero de vectores superior ou igual ao n´umero de vectores de qualquer sequˆencia linearmente independente.*

Proposi¸c˜ao

*Se um espa¸co vectorial E admite uma base com n elementos ent˜ao todas as bases de E tˆem n elementos.*

Defini¸c˜ao

Seja *E* um espa¸co vectorial que admite uma base com *n* elementos, *n ∈* N. Dizemos que *E* tem dimens˜ao *n* e escrevemos dim *E* = *n*.

Observa¸c˜ao

Como convencion´amos que o conjunto vazio ´e base de *E* = *{*0*E }* ent˜ao, neste caso, dim *E* = 0.

Um espa¸co vectorial que como *K*[*x*] n˜ao ´e finitamente gerado diz-se de dimens˜ao infinita.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 33 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Bases e dimens˜ao

Exemplos

1 dim K*n* = *n*.

2 dim*Mm×n*(K) = *mn*.

3 dim K*n*[*x*] = *n* + 1.

4 Se *D* ´e o conjunto das matrizes diagonais de *Mn×n*(K) ent˜ao dim *D* = *n*.

5 Se *T* ´e o conjunto das matrizes triangulares superiores de *Mn×n*(K) ent˜ao

dim *T* = *n* + (*n −* 1) + (*n −* 2) + *· · ·* + 1 = *n*(*n* + 1)

2*.*

6 C ´e um espa¸co vectorial sobre C, mas tamb´em ´e um espa¸co vectorial sobre R. No primeiro caso, a sua dimens˜ao ´e 1 e no segundo caso ´e 2. (Porquˆe?)Escrevemos ent˜ao

dimC C = 1 e dimR C = 2*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 34 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Bases e dimens˜ao

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial finitamente gerado. S˜ao equivalentes as afirma¸c˜oes:*

1 dim *E* = *n.*

2 *Existe uma sequˆencia geradora, com n vectores de E, e qualquer sequˆencia geradora de vectores de E tem, no m´ınimo, n elementos.* 3 *Existe uma sequˆencia linearmente independente, com n vectores de E, e qualquer sequˆencia linearmente independente de vectores de E tem, no m´aximo, n elementos.*

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial finitamente gerado. S˜ao equivalentes as afirma¸c˜oes:*

1 dim *E* = *n.*

2 *Qualquer sequˆencia geradora de E, com n vectores , ´e uma base de E.* 3 *Qualquer sequˆencia linearmente independente, com n vectores de E, ´e uma base de E.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 35 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Bases e dimens˜ao

Proposi¸c˜ao

*Se S* = (*v*1*, . . . , vs* ) *´e uma sequˆencia geradora de um espa¸co vectorial E ent˜ao existe uma subsequˆencia de S que ´e uma base de E*

Esquematicamente temos:

| *S* ´e sequˆencia  geradora de *E* |
| --- |

*−−−−−−−−−→r* etapas (*∗*)

| *S0* base de *E* |
| --- |

(*∗*) Em cada uma das *r* etapas “elimina-se” um vector da sequˆencia que seja combina¸c˜ao linear dos restantes.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 36 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Bases e dimens˜ao

*Teorema do Completamento*

*Se S* = (*u*1*, . . . , ur*) *´e uma sequˆencia linearmente independente de vectores de um espa¸co vectorial E de dimens˜ao n ent˜ao existe uma base de E que tem S como subsequˆencia. Ou seja, existem vectores w*1*, . . . ,wn−r de E, com n − r ≥* 0*, tais que*

(*u*1*, . . . , ur,w*1*, . . . ,wn−r*)

*´e uma base de E.*

Esquematicamente tem-se:

| *S* sequˆencia  linearmente independente de vectores de *E* |
| --- |

*−−−−−−−−−→s* etapas (*∗∗*) *s ∈* N0

| *S00* ´e base de *E* |
| --- |

(*∗∗*) Em cada uma das *s* etapas “acrescenta-se” um vector `a sequˆencia que n˜ao seja combina¸c˜ao linear dos restantes.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 37 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Bases e dimens˜ao

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial de dimens˜ao finita. Tem-se:*

1 *Se F ´e um subespa¸co de E ent˜ao* dim *F ≤* dim *E.*

2 *Se F ´e um subespa¸co de E e* dim *F* = dim *E ent˜ao F* = *E.*

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial e sejam u*1*, . . . , un vectores de E. Tem-se,* (*u*1*, . . . , un*) *´e uma base de E se, e s´o se, todo o vector de E ´e combina¸c˜ao linear dos vectores u*1*, . . . , un e s˜ao ´unicos os coeficientes da combina¸c˜ao linear*

Defini¸c˜ao

Seja *E* um espa¸co vectorial sobre K e (*u*1*, . . . , un*) uma base de *E*. Para cada *v ∈ E* os escalares *α*1*, . . . , αn ∈* K, ´unicos, tais que

*v* = *α*1*u*1 + *· · ·* + *αnun* dizem-se as coordenadas de *v* na base (*u*1*, . . . , un*) ou, mais correctamente, dizemos que (*α*1*, . . . , αn*) ´e a sequˆencia das coordenadas de *v* na base (*u*1*, . . . , un*).

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 38 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Bases e dimens˜ao

Exemplo

1

(1*,* 0)*,*(0*,* 1)´e uma base de R2. Se (*a, b*) *∈* R2ent˜ao, como (*a, b*) = *a*(1*,* 0) + *b*(0*,* 1)*,*

a sequˆencia das coordenadas de (*a, b*) na base anterior ´e (*a, b*).

2

(0*,* 1)*,*(1*,* 0)´e tamb´em uma base de R2. Em rela¸c˜ao a essa base,

como

(*a, b*) = *b*(0*,* 1) + *a*(1*,* 0)*,*

a sequˆencia das coordenadas de (*a, b*) ´e (*b, a*).

3 *B* =(*−*1*,* 1)*,*(0*,* 1)´e tamb´em uma base de R2. Determinemos a sequˆencia das coordenadas de (*a, b*) em rela¸c˜ao a essa base.

(*a, b*) = *α*1(*−*1*,* 1) + *α*2(0*,* 1) *⇔*

*−α*1 = *a*

*α*1 + *α*2 = *b⇔*

*α*1 = *−a*

*α*2 = *a* + *b.*

Assim a sequˆencia das coordenadas do vector (*a, b*) na base *B* =(*−*1*,* 1)*,*(0*,* 1)´e (*−a, a* + *b*).

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 39 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Bases e dimens˜ao

Exemplo

1 O vector que em rela¸c˜ao `a base

*B* =

(*−*1*,* 2*,* 3)*,*(0*,* 3*,* 4)*,*(0*,* 0*,* 5)

de R3tem a sequˆencia de coordenadas (7*, −*1*,* 4) ´e o vector

7(*−*1*,* 2*,* 3) + (*−*1)(0*,* 3*,* 4) + 4(0*,* 0*,* 5) =

=(*−*7*,* 14*,* 21) + (0*, −*3*, −*4) + (0*,* 0*,* 20)

=(*−*7*,* 11*,* 37)*.*

Defini¸c˜ao

Designamos por base can´onica de K*n*, e representamos por *b.c.*K*n* , a base (*e*1*, . . . , en*) sendo *ei*, *i* = 1*, . . . , n*, o *n*-uplo com todas as componentes nulas excepto a *i*-´esima componente que ´e igual a 1.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 40 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

4.6 Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

Teorema

*Se F e G s˜ao subespa¸cos de um espa¸co vectorial E ent˜ao F ∩ G ´e, ainda, um subespa¸co de E.*

Exemplo

Em R4consideremos os subespa¸cos

*F* = *{*(*a, b, c, d*) *∈* R4: *a − b* = 0 *∧ a − b − d* = 0*}*

*G* = *{*(*a, b, c, d*) *∈* R4: *b − c* = 0 *∧ d* = 0*}*

Sabemos ent˜ao que

*F ∩G* = *{*(*a, b, c, d*) *∈* R4: *a −b* = 0*∧a −b −d* = 0*∧b −c* = 0*∧d* = 0*}* e, portanto,

*F ∩ G* = *{*(*a, b, c, d*) *∈* R4: *a* = *c ∧ b* = *c ∧ d* = 0*}* = *{*(*c, c, c,* 0) : *c ∈* R*}* =

*{c*(1*,* 1*,* 1*,* 0) : *c ∈* R*}* = *h*(1*,* 1*,* 1*,* 0)*i*.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 41 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

4.6 Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

Processo para a determina¸c˜ao da intersec¸c˜ao de dois subespa¸cos:

1 Obter um sistema (*S*1) (resp. (*S*2)) de equa¸c˜oes lineares cujo conjunto de solu¸c˜oes ´e *F* (resp. G).

2 Considerar um sistema (*S*) constitu´ıdo por todas as equa¸c˜oes de (*S*1) e por todas as equa¸c˜oes de (*S*2).

3 O conjunto das solu¸c˜oes do sistema (*S*) ´e *F ∩ G*.

Proposi¸c˜ao

*Sejam F e G subespa¸cos de um espa¸co vectorial E. Tem-se F ∪ G ´e um subespa¸co de E se, e s´o se, F ⊆ G ou G ⊆ F.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 42 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

4.6 Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

Defini¸c˜ao

*Sejam F e G subespa¸cos de um espa¸co vectorial E. Chamamos* soma *dos subespa¸cos F e G ao conjunto*

*F* + *G* = *{u* + *v* : *u ∈ F ∧ v ∈ G} .*

Proposi¸c˜ao

*A soma de dois subespa¸cos de um espa¸co vectorial E ´e ainda um subespa¸co de E.*

Exemplo

*Sejam E* = R2*, F* =(*x, y*) *∈* R2: *y* = 0*e G* =(*x, y*) *∈* R2: *x* = 0*. Tem-se F ∪ G* =(*x, y*) *∈* R2: *x* = 0 *∨ y* = 0*.*

*Assim, por exemplo,* (2*,* 3)*6∈*(*F ∪ G*) *e, portanto, F ∪ G*$R2*. Mas F* + *G* = R2*, pois com* (*x,* 0) *∈ F e* (0*, y*) *∈ G temos*

*∀*(*x,y*)*∈*R2 (*x, y*) = (*x,* 0) + (0*, y*)*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 43 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

4.6 Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial e F e G subespa¸cos de E tais que*

*F* = *hu*1*, . . . , uri e G* = *hv*1*, . . . , vs i.*

*Tem-se*

*F* + *G* = *hu*1*, . . . , ur, v*1*, . . . , vs i.*

Exemplo

Sejam *F* = *{*(*x, y, z*) *∈* R3: *x* = *y* + 2*z}* e *G* = *h*(1*,* 0*, −*1)*,*(0*,* 3*,* 1)*i*. Temos que *F* = *{*(*x, y, z*) *∈* R3: *x* = *y* + 2*z}* =

*{*(*y* + 2*z, y, z*) : *y, z ∈* R*}*. Como para quaisquer *y, z ∈* R se tem (*y* + 2*z, y, z*) = *y*(1*,* 1*,* 0) + *z*(2*,* 0*,* 1), concluimos que

*F* = *h*(1*,* 1*,* 0)*,*(2*,* 0*,* 1)*i.*

Dado que *G* = *h*(1*,* 0*, −*1)*,*(0*,* 3*,* 1)*i* pela proposi¸c˜ao anterior temos *F* + *G* = *h*(1*,* 1*,* 0)*,*(2*,* 0*,* 1)*,*(1*,* 0*, −*1)*,*(0*,* 3*,* 1)*i*.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 44 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

4.6 Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial e sejam F e G subespa¸cos de E. S˜ao equivalentes as afirma¸c˜oes:*

1 *Se* (*u*1*, . . . , un*) *´e uma base de F e* (*v*1*, . . . , vs* ) *´e uma base de G ent˜ao* (*u*1*, . . . , un, v*1*, . . . , vs* ) *´e uma base de F* + *G.*

2 *F ∩ G* = *{*0*E }.*

3 *Se u, u0 ∈ F e v, v0 ∈ G s˜ao tais que u* + *v* = *u0* + *v0ent˜ao u* = *u0e v* = *v0.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 45 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

4.6 Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

Defini¸c˜ao

Sejam *F* e *G* subespa¸cos de um espa¸co vectorial *E*. Dizemos que *E* ´e a soma directa dos subespa¸cos *F* e *G* e escrevemos

*E* = *F ⊕ G*

se para cada *w ∈ E* existe um ´unico par (*u, v*) com *u ∈ F* e *v ∈ G* tal que *w* = *u* + *v.* Nestas condi¸c˜oes dizemos que *F* (resp. *G*) ´e um subespa¸co suplementar de *G* (resp. *F*) em *E*.Dizemos ainda que o vector *u* ´e a projec¸c˜ao de *w* sobre *F*, segundo *G* e que o vector *v* ´e a projec¸c˜ao de *w* sobre *G*, segundo *F*.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 46 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

4.6 Intersec¸c˜ao, uni˜ao e soma de subespa¸cos

Proposi¸c˜ao

*Sejam F e G subespa¸cos de um espa¸co vectorial E. S˜ao equivalentes as afirma¸c˜oes:*

1 *E* = *F ⊕ G.*

2 *E* = *F* + *G e F ∩ G* = *{*0*E }.*

Proposi¸c˜ao

*Seja E um espa¸co vectorial de dimens˜ao finita. Se F ´e um subespa¸co de E ent˜ao existe um subespa¸co G de E tal que*

*E* = *F ⊕ G,*

*isto ´e, todo o subespa¸co de um espa¸co vectorial de dimens˜ao finita tem um suplementar.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 47 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais O Teorema das Dimens˜oes

4.7 O Teorema das Dimens˜oes

Proposi¸c˜ao

Teorema das Dimens˜oes

*Se E ´e um espa¸co vectorial e F e G s˜ao subespa¸cos de E de dimens˜ao finita ent˜ao F* + *G e F ∩ G tamb´em tˆem dimens˜ao finita e*

dim(*F* + *G*) = dim *F* + dim *G −* dim(*F ∩ G*)*.*

Observa¸c˜ao

Se *F* e *G* s˜ao subespa¸cos de um espa¸co vectorial *E* s˜ao equivalentes as afirma¸c˜oes:

1 *F ∩ G* = *{*0*E }*,

2 dim(*F ∩ G*) = 0,

3 dim(*F* + *G*) = dim *F* + dim *G.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 48 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

4.8 Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

Nesta sec¸c˜ao veremos como utilizar as matrizes para resolver os seguintes problemas:

1 Determinar se uma sequˆencia de vectores de *E* ´e linearmente independente.

2 Determinar se um vector pertence ao subespa¸co gerado por uma dada sequˆencia de vectores.

3 Construir uma base de um espa¸co a partir de uma sequˆencia de geradora.

4 Construir uma base de um espa¸co a partir de uma sequˆencia linearmente independente, sendo conhecida a dimens˜ao do espa¸co. 5 Verificar se duas sequˆencias de vectores geram o mesmo espa¸co vectorial.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 49 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

4.8 Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

Recordemos que se *A ∈ Mm×n*(K) e

*A −−−−−−−→* (*linhas*)*B*

ent˜ao o subespa¸co gerado pelas linhas da matriz *A* ´e igual ao subespa¸co gerado pelas linhas da matriz *B* e que as linhas de *A* s˜ao linearmente independentes se, e s´o se, o mesmo suceder `as linhas de *B*.

Proposi¸c˜ao

*As linhas n˜ao nulas de uma matriz em forma de escada s˜ao linearmente independentes.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 50 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

4.8 Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

Vejamos como, utilizando matrizes, respondemos facilmente aos problemas anteriormente enunciados no caso do espa¸co vectorial K*n*.

Seja *F* um subespa¸co de K*n*e *S* = (*u*1*, . . . , up*) uma sequˆencia de vectores de *F* tais que *F* = *hu*1*, . . . , upi.*

Seja *A ∈ Mp×n*(K) a matriz cuja linha *i* ´e *ui*, *i* = 1*, . . . , p* e seja *A0*a matriz em forma de escada equivalente por linhas a *A*.



*u*1



...

Sem exigˆencias de rigor escrevemos

*up*

linha *i* ´e *ui, i* = 1*, . . . p*.



 para representar a matriz cuja

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 51 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

1. Determinar se uma sequˆencia de vectores de *E* ´e linearmente independente. 1. A sequˆencia *S* ´e linearmente independente se, e s´o se, *A0* n˜ao tem linhas nulas,

ou seja, r Exemplo

 

 

*u*1 ...

*up*

 



 = *p*.

Considere-se a sequˆencia de vectores de R4 *S* =(1*,* 4*,* 3*,* 6)*,*(0*,* 0*,* 0*,* 2)*,*(2*,* 8*,* 1*,* 3)*.*

Tal sequˆencia ´e linearmente independente se, e s´o se, rComo



1 4 3 6

0 0 0 2

2 8 1 3

 

!

= 3*.*



1 4 3 6

0 0 0 2 2 8 1 3



*−−−−−−−→ l*3 + (*−*2)*l*1



1 4 3 6

0 0 0 2 0 0 *−*5 *−*9



*−−−−−→ l*2 *←→ l*3



1 4 3 6

0 0 *−*5 *−*9 0 0 0 2



 (f.e.)

conclu´ımos que *S* ´e linearmente independente.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 52 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

2. Determinar se um vector pertence ao subespa¸co gerado por uma dada sequˆencia de vectores.

2. Determinar se um vector *v* pertence ao subespa¸co *F* de K*n* ´e equivalente a averiguar se *v* ´e combina¸c˜ao linear dos vectores da sequˆencia *S*, geradora de *F*.

Isto ´e r

 

 

*u*1 ...

*up*

 



 = r

 

 

*u*1 ...

*up*

 

 .

Exemplo

*v*

Seja *F* =(1*,* 4*,* 3*,* 6)*,*(0*,* 0*,* 0*,* 2)*,*(2*,* 8*,* 1*,* 3)*.* Como vimos no exemplo anterior, a sequˆencia

(1*,* 4*,* 3*,* 6)*,*(0*,* 0*,* 0*,* 2)*,*(2*,* 8*,* 1*,* 3)´e linearmente independente e, portanto,

Base de *F* =

(1*,* 4*,* 3*,* 6)*,*(0*,* 0*,* 0*,* 2)*,*(2*,* 8*,* 1*,* 3)

*.*

Determinemos se (1*,* 4*, −*2*, −*3) *∈ F*, utilizando matrizes.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 53 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

2. Determinar se um vector pertence ao subespa¸co gerado por uma dada sequˆencia de vectores.

*Note que*

(1*,* 4*, −*2*, −*3) *∈ F*

*se, s´o se,* (1*,* 4*, −*2*, −*3) *se pode escrever como combina¸c˜ao linear dos vectores*

(1*,* 4*,* 3*,* 6)*,*(0*,* 0*,* 0*,* 2)*,*(2*,* 8*,* 1*,* 3)

*ou equivalentemente, se, e s´o se, as matrizes*

*A* =



1 4 3 6

0 0 0 2 2 8 1 3



 *e C* =



1 4 3 6

0 0 0 2 2 8 1 3 1 4 *−*2 *−*3

 

*tˆem a mesma caracter´ıstica.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 54 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

2. Determinar se um vector pertence ao subespa¸co gerado por uma dada sequˆencia de vectores.

*Vimos no exemplo anterior que* r(*A*) = 3 *e, como*

*C* =



1 4 3 6

0 0 0 2 2 8 1 3



*−−−−−→ l*3+(*−*2)*l*1 *l*4+(*−*1)*l*1



1 4 3 6

0 0 0 2 0 0 *−*5 *−*9



*−−−−−→ l*2 *←→ l*4



1 4 3 6

0 0 *−*5 *−*9 0 0 *−*5 *−*9



*−→*

1 4 *−*2 *−*3 



0 0 *−*5 *−*9 



0 0 0 2

*−−−−−−−→ l*3 + (*−*1)*l*2

1 4 3 6

0 0 *−*5 *−*9 0 0 0 0 0 0 0 2

*−−−−−→ l*3 *←→ l*4

1 4 3 6

0 0 *−*5 *−*9 0 0 0 2 0 0 0 0

*(f.e.),*

*conclu´ımos que* r(*C*) = 3 *e, portanto,*

(1*,* 4*, −*2*, −*3) *∈ F.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 55 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

3. Construir uma base de um espa¸co a partir de uma sequˆencia de geradora. 3.a Uma base de *F* ´e const´ıtuida pelas linhas n˜ao nulas de *A0*, isto ´e, se

 

*u*1 ...

*up*



 *−−−−−−→* (*linhas*)

 



*u0*1...

(f.e.), (*u0*1*, . . . , u0s*) ´e uma base de *F*.

*u0s*0

...

0

Exemplo

Consideremos o subespa¸co de R3 *G* =(1*, −*1*,* 0)*,*(0*,* 1*,* 4)*,*(2*, −*1*,* 4)e determinemos uma base de *G*.

Tem-se

*A* =



1 *−*1 0

0 1 4 2 *−*1 4



*−−−−−−−→ l*3 + (*−*2)*l*1



1 *−*1 0

0 1 4 0 1 4



*−−−−−−−→ l*3 + (*−*1)*l*2



1 *−*1 0

0 1 4 0 0 0



 (f.e.)*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 56 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

3. Construir uma base de um espa¸co a partir de uma sequˆencia de geradora.

*Logo,*

*G* =

*Como a sequˆencia*

D

(1*, −*1*,* 0)*,*(0*,* 1*,* 4)

(1*, −*1*,* 0)*,*(0*,* 1*,* 4)

E

*.*

*´e geradora de G e ´e linearmente independente (note que os elementos da sequˆencia s˜ao as linhas n˜ao nulas de uma matriz em forma de escada) ent˜ao tal sequˆencia ´e uma base de G, tendo-se* dim *G* = 2*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 57 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

3. Construir uma base de um espa¸co a partir de uma sequˆencia de geradora.

3. b As linhas n˜ao nulas de *A0*s˜ao uma base de *F*. Tendo em considera¸c˜ao as eventuais trocas efectuadas para obter *A0*a partir de *A*, determinamos facilmente uma subsequˆencia de *S* que ´e uma base de *F*.

Exemplo

Se *G* = *h*(1*,* 2*, −*1)*,*(2*,* 4*, −*2)*,*(1*,* 5*,* 2)*i* ent˜ao Tem-se

*A* =



1 2 *−*1

2 4 2 1 5 2



*−−−−−→ l*2+(*−*2)*l*1 *l*3+(*−*1)*l*1



1 2 *−*1

0 0 0 0 3 3



*−−−−→ l*3 *↔ l*2



1 2 *−*1

0 3 3 0 0 0



 (f.e.)*.*

Analogamente ao exemplo anterior, uma base de *G* ´e ((1*,* 2*, −*1)*,*(0*,* 3*,* 3)) mas tamb´em, tendo em aten¸c˜ao as trocas efectuadas, uma base de *G* ´e

((1*,* 2*, −*1)*,*(1*,* 5*,* 2))*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 58 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

3. Construir uma base de um espa¸co a partir de uma sequˆencia de geradora.

Exemplo

Seja *F* =(*x, y, z*) *∈* R3: *x* = *y* + 2*z*e

*G* =(1*,* 0*, −*1)*,*(2*,* 0*,* 4)*,*(0*,* 3*,* 1). Vimos anteriormente que *F* + *G* =(1*,* 1*,* 0)*,*(2*,* 0*,* 1)*,*(1*,* 0*, −*1)*,*(2*,* 0*,* 4)*,*(0*,* 3*,* 1)*.* Para obter uma base de *F* + *G* procedemos da seguinte forma:

 

1 1 0 2 0 1 1 0 *−*1 2 0 4 0 3 1



*−−−−−→ l*2+(*−*2)*l*1

*l*3+(*−*1)*l*1 *l*4+(*−*2)*l*1

 

1 1 0 0 *−*2 1 0 *−*1 *−*1 0 *−*2 4 0 3 1



*−−→l*2*↔l*3

 

1 1 0 0 *−*1 *−*1 0 *−*2 1 0 *−*2 4 0 3 1



*−→*

*−−−−−→ l*3+(*−*2)*l*2 *l*4+(*−*2)*l*2 *l*5+3*l*2

 

1 1 0 0 *−*1 *−*1 0 0 3 0 0 6 0 0 *−*2



*−−−−−→ l*4+(*−*2)*l*3 *l*5+( 23)*l*3

 

1 1 0 0 *−*1 *−*1 0 0 3 0 0 0 0 0 0

 

Logo, uma base de *F* + *G* ´e

(1*,* 1*,* 0)*,*(0*, −*1*, −*1)*,*(0*,* 0*,* 3)e tamb´em (1*,* 1*,* 0)*,*(2*,* 0*,* 1)*,*(1*,* 0*, −*1).

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 59 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

4. Construir uma base de um espa¸co a partir de uma sequˆencia linearmente independente, sendo conhecida a dimens˜ao do espa¸co.

4. Seja *S0* = (*u*1*, . . . , up*) uma sequˆencia linearmente independente de vectores de em subespa¸co *F* de K*n*e seja *s* a dimens˜ao de *F*. Seja *S0* = (*w*1*, . . . ,ws* ) uma base de *F*. Se *p < s*, obtemos uma base de *F* ”acrescentando” *s − p* vectores a *S0*, com a restri¸c˜ao de tais vectores pertencerem a *F* e a nova sequˆencia ser linearmente independente.

Ou seja, se  

e 

*w*1 ...

*ws*

*u*1

...

*up*



 *−−−−−−→* (*linhas*)



 *−−−−−−→* (*linhas*)









*w0*1... *w0s*

*u0*1...

*u0p*



 = *W 0*(f.e.)



 = *U0*(f.e.)

ent˜ao considerem-se as *s − p* linhas de *W 0*, (*w0i*1*, . . .w0is−p*) com pivˆos em ´ındice de coluna distintos dos da matriz *U0*. Nestas condi¸c˜oes a sequˆencia (*u0*1*, . . . , u0p,w0i*1*, . . .w0is−p*) ´e uma base de *F* .

Tamb´em ´e base de *F* a sequˆencia (*u*1*, . . . , up,w0i*1*, . . .w0is−p*).

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 60 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

4. Construir uma base de um espa¸co a partir de uma sequˆencia linearmente independente, sendo conhecida a dimens˜ao do espa¸co.

Exemplo

Considere-se a sequˆencia de vectores de R4

*.*

Como

*S* =

(1*,* 4*,* 3*,* 6)*,*(0*,* 0*,* 0*,* 2)*,*(2*,* 8*,* 1*,* 3)



1 4 3 6

0 0 0 2 2 8 1 3



*−−−−−−−→ l*3 + (*−*2)*l*1



1 4 3 6

0 0 0 2 0 0 *−*5 *−*9



*−−−−−→ l*2 *←→ l*3



1 4 3 6

0 0 *−*5 *−*9 0 0 0 2



 (f.e.)

conclu´ımos que *S* ´e linearmente independente.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 61 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

4. Construir uma base de um espa¸co a partir de uma sequˆencia linearmente independente, sendo conhecida a dimens˜ao do espa¸co.

*Se acrescentarmos `a sequˆencia S, por exemplo, o vector* (0*,* 1*,* 0*,* 0) *obtemos ainda uma sequˆencia linearmente independente. Basta atender a que se tem*

*B* =



1 4 3 6

0 0 0 2 2 8 1 3 0 1 0 0



*−−−−−−→* (*linhas*)



1 4 3 6

0 0 *−*5 *−*9 0 0 0 2 0 1 0 0



*−−−−−−→* (*linhas*)



1 4 3 6

0 1 0 0 0 0 *−*5 *−*9 0 0 0 2



*(f.e.)*

*e* r(*B*) = 4*.*

*Como a sequˆencia* (1*,* 4*,* 3*,* 6)*,*(0*,* 1*,* 0*,* 0)*,*(0*,* 0*, −*5*,* 9)*,*(0*,* 0*,* 0*,* 2)*´e linearmente independente e tem* 4 = dim(R4) *vectores ´e uma base de* R4*.*

*E tamb´em base de ´ F*(1*,* 4*,* 3*,* 6)*,*(0*,* 0*,* 0*,* 2)*,*(2*,* 8*,* 1*,* 3)*,*(0*,* 1*,* 0*,* 0)*.* Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 62 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

5. Verificar se duas sequˆencias de vectores geram o mesmo espa¸co vectorial. 5.Sejam (*u*1*, . . . , up*) e(*v*1*, . . . , vq*) sequˆencias de vectores de K*n*. Se





, e 

*u*1 ...

*up*

*v*1 ...

*vq*



 *−−−−−−−→* (*linhas*)*U00* (f.e.r.)



 *−−−−−−−→* (*linhas*)*V00* (f.e.r.)

ent˜ao *hu*1*, . . . , upi* = *hv*1*, . . . , vqi* se, e s´o se s˜ao iguais as linhas n˜ao nulas das marizes *U00* e *V00*.

Exemplo

Determinemos se as sequˆencias

((1*, −*1*,* 0)*,*(0*,* 1*,* 4)*,*(2*, −*1*,* 4)), ((1*,* 0*,* 4)*,*(3*, −*2*,* 4)) e ((1*, −*1*,* 0)*,*(0*,* 1*,* 1)) geram o mesmo subespa¸co de R3.

Atendendo a que

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 63 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

5. Verificar se duas sequˆencias de vectores geram o mesmo espa¸co vectorial.



1 *−*1 0

0 1 4 2 *−*1 4

*e*



*−−−−→ l*3 *−* 2*l*1



1 *−*1 0

0 1 4 0 1 4



*−−−→ l*3 *− l*2



1 *−*1 0

0 1 4 0 0 0



*−−−→ l*1 + *l*2



1 0 4

0 1 4 0 0 0



 *(f.e.r.),*

1 0 4 3 *−*2 4

*−−−−→ l*2 *−* 3*l*11 0 4 0 *−*2 *−*8

*−−→−*1 2*l*2

1 0 4 0 1 4

*(f.e.r.)*

*e*1 *−*1 0 0 1 1

*conclu´ımos que*

*−−−→ l*1 + *l*21 0 1 0 1 1

*(f.e.r.),*

*h*(1*, −*1*,* 0)*,*(0*,* 1*,* 4)*,*(2*, −*1*,* 4)*i* = *h*(1*,* 0*,* 4)*,*(3*, −*2*,* 4)*i 6*= *h*(1*, −*1*,* 0)*,*(0*,* 1*,* 1)*i.* Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 64 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

Vimos que os problemas enunciados no ´ınicio desta sec¸c˜ao podem ser resolvidos utilizando matrizes, para *E* = K*n*. O que sucede se *E 6*= K*n*? Por exemplo, como resolver os problemas anteriores se

*E* = K*r*[*x*] ou *E* = *Mm×n*(K)?

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 65 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

Observa¸c˜ao

Para qualquer espa¸co vectorial *E* de dimens˜ao *n*, se fixarmos em *E* uma base *B* ent˜ao a “correspondˆencia”

*f* : *E −→* K*n*

*u 7→* (*β*1*, . . . , βn*)

que a cada vector *u ∈ E* associa a sequˆencia das coordenadas de *u* na base *B* (i.e. se *B* = (*e*1*, . . . , en*) ent˜ao *u* = *β*1*e*1 + *· · ·* + *βnen*) ´e uma aplica¸c˜ao bijectiva.

A resolu¸c˜ao de problemas envolvendo vectores de *E* = K*r*[*x*] ou de *E* = *Mm×n*(K) pode ser feita com vectores, respectivamente, de K*r*+1 ou de K*mn* utilizando as sequˆencias das coordenadas dos vectores em causa em rela¸c˜ao a uma base fixa *B* de *E*.

O mesmo racioc´ınio pode ser seguido para qualquer espa¸co vectorial *E* de dimens˜ao finita e assim continuar a utilizar as matrizes para resolver os problemas.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 66 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

Exemplo

Em R3[*x*], consideremos a sequˆencia

*S* =*x*3 + 4*x*2 + 3*x* + 6*,* 2*,* 2*x*3 + 8*x*2 + *x* + 3*.*

Verifiquemos que *S* ´e linearmente independente e determinemos uma base de R3[*x*] que tenha *S* como subsequˆencia.

Considere-se em R3[*x*] a base *B* =*x*3*, x*2*, x,* 1. Em rela¸c˜ao `a base *B*, a sequˆencia das coordenadas de:

*x*3 + 4*x*2 + 3*x* + 6 ´e (1*,* 4*,* 3*,* 6)*,*

2 ´e (0*,* 0*,* 0*,* 2)*,*

2*x*3 + 8*x*2 + *x* + 3 ´e (2*,* 8*,* 1*,* 3)*.*

Como vimos num exemplo anterior a sequˆencia

*S0* =(1*,* 4*,* 3*,* 6)*,*(0*,* 0*,* 0*,* 2)*,*(2*,* 8*,* 1*,* 3)

´e linearmente independente

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 67 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

Exemplo

e o mesmo sucede `a sequˆencia

(1*,* 4*,* 3*,* 6)*,*(0*,* 0*,* 0*,* 2)*,*(2*,* 8*,* 1*,* 3)*,*(0*,* 1*,* 0*,* 0)

*.*

O elemento de R3[*x*] que na base *B* =*x*3*, x*2*, x,* 1tem a sequˆencia de coordenadas

(0*,* 1*,* 0*,* 0) ´e 0*x*3 + 1*x*2 + 0*x* + 0 = *x*2*.*

Assim,

*S* =*x*3 + 4*x*2 + 3*x* + 6*,* 2*,* 2*x*3 + 8*x*2 + *x* + 3

´e linearmente independente e

*x*3 + 4*x*2 + 3*x* + 6*,* 2*,* 2*x*3 + 8*x*2 + *x* + 3*, x*2

´e tamb´em linearmente independente. Como tem 4 = dim R3[*x*] vectores ´e uma base de R3[*x*].

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 68 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

Exemplo

Seja *E* um espa¸co vectorial tal que *B* = (*e*1*, e*2*, e*3*, e*4) ´e uma base de *E*. Verifiquemos que a sequˆencia

*S* = (*e*1 + *e*2 + *e*4*,* 2*e*1 + 2*e*2 + *e*3 + *e*4)

´e linearmente independente e “completemos” essa sequˆencia de forma a obter uma base de *E*, isto ´e, determinemos uma base de *E* que tenha *S* como subsequˆencia.

Em rela¸c˜ao `a base *B* a sequˆencia das coordenadas de:

*e*1 + *e*2 + *e*4 ´e (1*,* 1*,* 0*,* 1)*,*

2*e*1 + 2*e*2 + *e*3 + *e*4 ´e (2*,* 2*,* 1*,* 1)*.*

Tem-se

*A* =

com

1 1 0 1 2 2 1 1

*−−−−−−−→ l*2 + (*−*2)*l*11 1 0 1 0 0 1 *−*1

r(*A*) = 2

(f.e.)

e, portanto, a sequˆencia *S* ´e linearmente independente.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 69 / 70

4. Espa¸cos Vectoriais Matrizes e Espa¸cos Vectoriais

Exemplo

Dado que

*A0* =



1 1 0 1

2 2 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1



*−−−−−−−→ l*2 + (*−*2)*l*1



1 1 0 1

0 0 1 *−*1 0 1 0 0 0 0 0 1



*−−−−−→ l*2 *←→ l*3



1 1 0 1

0 1 0 0 0 0 1 *−*1 0 0 0 1



(f.e.)

e r(*A0*) = 4 podemos afirmar que

(1*,* 1*,* 0*,* 1)*,*(2*,* 2*,* 1*,* 1)*,*(0*,* 1*,* 0*,* 0)*,*(0*,* 0*,* 0*,* 1)

´e uma sequˆencia linearmente independente.

Em rela¸c˜ao `a base *B* = (*e*1*, e*2*, e*3*, e*4) a sequˆencia de coordenadas de (0*,* 1*,* 0*,* 0) ´e 0*e*1 + 1*e*2 + 0*e*3 + 0*e*4 = *e*2*,*

(0*,* 0*,* 0*,* 1) ´e 0*e*1 + 0*e*2 + 0*e*3 + 1*e*4 = *e*4*.*

Logo, (*e*1 + *e*2 + *e*4*,* 2*e*1 + 2*e*2 + *e*3 + *e*4*, e*2*, e*4) ´e linearmente independente e como tem 4 = dim *E* vectores ´e uma base de *E*.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 70 / 70