Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 2 - Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

*Departamento de Matem´atica*

*FCT/UNL*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 1 / 1

Programa

1 Matrizes

2 Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

3 Determinantes

4 Espa¸cos Vectoriais

5 Aplica¸c˜oes Lineares

6 Valores e Vectores Pr´oprios

7 Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto

8 Geometria Anal´ıtica

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 2 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Defini¸c˜ao

Uma Equa¸c˜ao linear nas inc´ognitas *x*1*, . . . , xn*, sobre K, ´e uma equa¸c˜ao do tipo

*a*1*x*1 + *· · ·* + *anxn* = *b* (1)

com *a*1*, . . . , an, b ∈* K.

Chamamos a *a*1*, . . . , an* os coeficientes da equa¸c˜ao e a *b* o segundo membro ou termo independente da equa¸c˜ao. Se *b* = 0 dizemos que a equa¸c˜ao ´e linear homog´enea.

Dizemos que (*β*1*, . . . , βn*) *∈* K*n* ´e uma solu¸c˜ao da equa¸c˜ao (??) ou que satisfaz a equa¸c˜ao se substituindo *xi* por *βi*, *i* = 1*, . . . , n*, se obt´em uma proposi¸c˜ao verdadeira, isto ´e, (*β*1*, . . . , βn*) *∈* K*n* ´e uma solu¸c˜ao da equa¸c˜ao (??)se ´e verdadeira a proposi¸c˜ao

*a*1*β*1 + *· · ·* + *anβn* = *b.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 3 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Defini¸c˜ao

Um Sistema de equa¸c˜oes lineares ´e uma conjun¸c˜ao de um n´umero finito de equa¸c˜oes lineares, todas nas mesmas inc´ognitas.

(*S*)



*a*11*x*1 + *· · ·* + *a*1*nxn* = *b*1 *a*21*x*1 + *· · ·* + *a*2*nxn* = *b*2 *· · ·*



*am*1*x*1 + *· · ·* + *amnxn* = *bm*

com *m, n ∈* N, *aij , bi ∈* K, *i* = 1*, . . . , m*, *j* = 1*, . . . , n*.

Diz-se que (*S*) ´e um sistema de *m* equa¸c˜oes lineares, nas *n* inc´ognitas *x*1*, . . . , xn*, sobre K.

Se *b*1 = *b*2 = *· · ·* = *bm* = 0 dizemos que (*S*) ´e um sistema homog´eneo. Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 4 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Defini¸c˜ao

(*β*1*, . . . , βn*) *∈* K*n* ´e uma solu¸c˜ao do sistema (*S*) se



*a*11*β*1 + *· · ·* + *a*1*nβn* = *b*1 *a*21*β*1 + *· · ·* + *a*2*nβn* = *b*2 *· · ·*



*am*1*β*1 + *· · ·* + *amnβn* = *bm*

(*S*) diz-se imposs´ıvel se n˜ao existe nenhuma solu¸c˜ao de (*S*), ou equivalentemente, se o conjunto das solu¸c˜oes do sistema (*S*) ´e o conjunto vazio.

(*S*) diz-se sistema poss´ıvel se admite pelo menos uma solu¸c˜ao.

(*S*) poss´ıvel diz-se determinado se tem uma, e uma s´o, solu¸c˜ao e indeterminado se tem mais do que uma solu¸c˜ao.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 5 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

*C* = conjunto das solu¸c˜oes do sistema (*S*)

*Ci* = conjunto das solu¸c˜oes da *i*-´esima equa¸c˜ao de (*S*), *i* = 1*, . . . , m C* = *C*1 *∩ C*2 *∩ · · · ∩ Cm*

(*S*) sistema homog´eneo

(*S*)



*a*11*x*1 + *· · ·* + *a*1*nxn* = 0 *a*21*x*1 + *· · ·* + *a*2*nxn* = 0 *· · ·*



*am*1*x*1 + *· · ·* + *amnxn* = 0

ent˜ao (0*,* 0*, . . . ,* 0) *∈* K*n* ´e uma solu¸c˜ao de (S), a que chamamos a solu¸c˜ao nula. Logo um sistema homog´eneo ´e sempre poss´ıvel, podendo ser determinado se tiver apenas a solu¸c˜ao nula ou indeterminado se tiver mais solu¸c˜oes.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 6 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Exemplo *x*1 + 2*x*2 = 0

*−*2*x*1 *−* 4*x*2 = 0

(0*,* 0) *e* (*−*2*,* 1) *s˜ao solu¸c˜oes do sistema homog´eneo nas inc´ognitas x*1 *e x*2*, sobre* R

*−*2 + 2 *×* 1 = 0

*−*2 *×* (*−*2) *−* 4 *×* 1 = 0

*C* = *{*(*α*1*, α*2) *∈* R2: *α*1 = *−*2*α*2*}*

= *{*(*−*2*α*2*, α*2) : *α*2 *∈* R*}.*

*Sistema homog´eneo indeterminado.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 7 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Problemas a resolver

(1) Discuss˜ao do sistema: Indicar para um dado sistema se este ´e imposs´ıvel ou poss´ıvel e, no caso de ser poss´ıvel, se ´e determinado ou indeterminado, sem determinar o conjunto de solu¸c˜oes.

(2) Resolu¸c˜ao do sistema: Dado um sistema de equa¸c˜oes lineares, determinar o conjunto das suas solu¸c˜oes (que ser´a o conjunto vazio se o sistema for imposs´ıvel).

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 8 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Defini¸c˜ao

Dado um sistema de equa¸c˜oes lineares, nas inc´ognitas *x*1*, . . . , xn*, sobre K

(*S*)



*a*11*x*1 + *· · ·* + *a*1*nxn* = *b*1 *· · ·*

*,*



*am*1*x*1 + *· · ·* + *amnxn* = *bm*

chamaremos forma matricial do sistema (*S*) a (*S*) *AX* = *B*

onde

*A* =



*a*11 *· · · a*1*n*

*· · ·*

*am*1 *· · · amn*



*, X* =

 

*x*1 ...

*xn*







e *B* =

*b*1 ...

*bm*



*.*

*A ∈ Mm×n*(K) ´e a matriz simples do sistema

*X ∈ Mn×*1(K) ´e a matriz das inc´ognitas

*B ∈ Mm×*1(K) ´e a matriz dos termos independentes.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 9 / 1

*Seja*

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares



*a*11*x*1 + *· · ·* + *a*1*nxn* = *b*1

(*S*)

*· · ·*

*,*



*am*1*x*1 + *· · ·* + *amnxn* = *bm*

*A* =



*a*11 *· · · a*1*n*

*· · ·*

*am*1 *· · · amn*



*, X* =

 

*x*1 *...*

*xn*





*e B* = 

*b*1 *...*

*bm*



*.*

Matriz ampliada *do sistema* (*S*) *´e a matriz de Mm×*(*n*+1)(K) *cuja coluna i, i* = 1*, . . . , n, ´e igual `a coluna i de A e cuja coluna n* + 1 *´e igual `a coluna (´unica) de B.*

[*A | B*]

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 10 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Exemplo

*O sistema de equa¸c˜oes lineares nas inc´ognitas x*1*, x*2*, x*3*, sobre* R*,*

 

*x*1 + *x*2 *− x*3 = 0 2*x*1 + *x*2 = 1 *x*1 *− x*3 = 1 3*x*1 + *x*2 *− x*3 = 2

*Forma matricial*



1 1 *−*1



2 1 0

1 0 *−*1

3 1 *−*1

*e a sua matriz ampliada ´e*





*x*1

*x*2

*x*3



 = 



011 2



*,*

1 1 *−*1 0

2 1 0 1 1 0 *−*1 1 3 1 *−*1 2

*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 11 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Proposi¸c˜ao

*Dado um sistema* (*S*) *AX* = *B,* (*β*1*, . . . , βn*) *∈* K*n ´e uma solu¸c˜ao de* (*S*)

*se, e s´o se, A*

 

*β*1 *...*

*βm*



 = *B.*



*b*1





*A* = [*aij*] *∈ Mm×n*(K) e *B* = de (*S*) se, e s´o se,

 *∈ Mm×*1(K). (*β*1*, . . . , βn*) ´e solu¸c˜ao

...

*bm*



*a*11*β*1 + *· · ·* + *a*1*nβn* = *b*1 *· · ·*

*,*



*am*1*β*1 + *· · ·* + *amnβn* = *bm*



*a*11 *· · · a*1*n*

*· · ·*

*am*1 *· · · amn*

 

 

*β*1 ...

*βn*



 =

 

*b*1 ...

*bm*



*,* i.e., *A*

 

*β*1 ...

*βn*



 = *B*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 12 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Defini¸c˜ao

Sejam (*S*) e (*S0*) sistemas de equa¸c˜oes lineares sobre K. Dizemos que (*S*) e (*S0*) s˜ao equivalentes se tˆem o mesmo conjunto de solu¸c˜oes.

Proposi¸c˜ao

*Sejam A ∈ Mm×n*(K) *e B ∈ Mm×*1(K)*. Se P ∈ Mm×m*(K) *´e uma matriz* invert´ıvel *ent˜ao os sistemas*

(*S*) *AX* = *B e* (*S0*) (*PA*)*X* = *PB*

*s˜ao equivalentes.*

Proposi¸c˜ao

*Seja AX* = *B um sistema de equa¸c˜oes lineares. Se*

[*A | B*] *−−−−−−−→* (*linhas*)[*A0| B0*]

*ent˜ao os sistemas AX* = *B e A0X* = *B0s˜ao equivalentes.* Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 13 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Proposi¸c˜ao

*A ∈ Mm×n*(K) *e B ∈ Mm×*1(K)*. Tem-se*

r ([*A | B*]) = r(*A*) *ou* r ([*A | B*]) = r(*A*) + 1

*pelo que*

r(*A*) *≤* r ([*A | B*])*.*

Sejam *A ∈ Mm×n*(K) e *B ∈ Mm×*1(K). Como r(*A*) *≤* r([*A | B*]) e r(*A*) *≤ n*

temos

r(*A*) *<* r([*A | B*])

❅❅ r(*A*) = r([*A | B*]) r(*A*) = r([*A | B*]) = *n*

❅

❅ r(*A*) = r([*A | B*]) *< n .*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 14 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Teorema

*Seja AX* = *B um sistema de equa¸c˜oes lineares, com A ∈ Mm×n*(K) *e B ∈ Mm×*1(K)*. Tem-se:*

1. *Se* r(*A*) *<* r([*A | B*]) *ent˜ao o sistema ´e imposs´ıvel.*

2. *Se* r(*A*) = r([*A | B*]) *ent˜ao o sistema ´e poss´ıvel.*

*Tem-se, ainda,*

2.1. *Se* r(*A*) = r([*A | B*]) = *n ent˜ao o sistema ´e poss´ıvel determinado.* 2.2. *Se* r(*A*) = r([*A | B*]) *< n ent˜ao o sistema ´e poss´ıvel indeterminado.*

Defini¸c˜ao

Seja *AX* = *B* um sistema poss´ıvel indeterminado, com *A ∈ Mm×n*(K). A *n −* r(*A*) chamamos o grau de indetermina¸c˜ao do sistema.

Seja [*A0|B0*] uma matriz em forma de escada equivalente por linhas `a matriz ampliada de um sistema (*S*). As incognitas correspondentes aos pivˆos de ` [*A0|B0*] damos os nome de inc´ognitas b´asicas. As restantes inc´ognitas ` damos o nome de inc´ognitas livres.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 15 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Observa¸c˜ao

O grau de indetermina¸c˜ao de um sistema poss´ıvel indeterminado ´e igual ao n´umero de inc´ognitas livres.

Resumo da discuss˜ao do sistema *AX* = *B*

r(*A*) *<* r([*A | B*])

*AX* = *B*

Sistema Imposs´ıvel

r(*A*) = r([*A | B*]) = *n*

Sistema

❅❅ r(*A*) = r([*A | B*])

Sistema Poss´ıvel Determinado

Sistema Poss´ıvel

❅❅ r(*A*) = r([*A | B*]) *< n .*

Sistema Poss´ıvel Indeterminado, com grau de indetermina¸c˜ao

*n −* r(*A*)

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 16 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Exemplo

*Sistema de equa¸c˜oes lineares nas inc´ognitas x*1*, x*2*, x*3*, x*4*, sobre* R*,*

(*S*)



*x*1 + 2*x*2 + *x*3 *−* 3*x*4 = *−*5 2*x*1 + 4*x*2 + 4*x*3 *−* 4*x*4 = *−*6

*.*



*−x*1 *−* 2*x*2 *−* 3*x*3 *− x*4 = 3

Discuss˜ao do sistema (*S*)*: Forma matricial AX* = *B com*

[*A | B*] =



1 2 1 *−*3 *−*5

2 4 4 *−*4 *−*6 *−*1 *−*2 *−*3 *−*1 3



*−−−−−→ l*2+(*−*2)*l*1 *l*3+(1)*l*1



1 2 1 *−*3 *−*5

0 0 2 2 4 0 0 *−*2 *−*4 *−*2



*−→*

*−−−−−−→ l*3 + (1)*l*2



1 2 1 *−*3 *−*5

0 0 2 2 4 0 0 0 *−*2 2



 = [*A0| B0*] *f.e*

r(*A*) = 3 = r([*A | B*]) *<* 4 = *n´umero de inc´ognitas,*

(*S*) *´e um sistema poss´ıvel indeterminado, com grau de indetermina¸c˜ao 1* (= 4 *−* 3)*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 17 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Exemplo

Resolu¸c˜ao do sistema (*S*)*:*

[*A0| B0*] =



1 2 1 *−*3 *−*5 0 0 2 2 4

 

*−−→*12*l*2 *−* 12*l*3



1 2 1 *−*3 *−*5 0 0 1 1 2



*−→*

0 0 0 *−*2 2





0 0 0 1 *−*1

*−−−−−→ l*2+(*−*1)*l*3 *l*1+3*l*3

1 2 1 0 *−*8

0 0 1 0 3 0 0 0 1 *−*1



*−−−−−−−→ l*1 + (*−*1)*l*2

1 2 0 0 *−*11

0 0 1 0 3 0 0 0 1 *−*1



 = [*A00 | B00*] *f.e.r..*

*A inc´ognita livre ´e x*2 *e o sistema* (*S*) *´e equivalente ao sistema*

 

*x*1 = *−*11 *−*2*x*2 *x*3 = 3

*x*4 = *−*1

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 18 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Exemplo

(*α*1*, α*2*, α*3*, α*4) *∈* R4 *´e solu¸c˜ao do sistema* (*S*) *se, e s´o se,*

 

*α*1 = *−*11 *−*2*α*2 *α*3 = 3

*.*

*α*4 = *−*1

*C* =(*α*1*, α*2*, α*3*, α*4) *∈* R4: *α*1 = *−*11 *−* 2*α*2 *∧ α*3 = 3 *∧ α*4 = *−*1 = *{*(*−*11 *−* 2*α*2*, α*2*,* 3*, −*1) : *α*2 *∈* R*} .*

Defini¸c˜ao

Um sistema de equa¸c˜oes lineares *AX* = *B* diz-se um sistema de Cramer se *A* ´e quadrada e invert´ıvel.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 19 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Observe-se que qualquer sistema de Cramer *AX* = *B* ´e poss´ıvel determinado. Sendo (*α*1*, . . . , αn*) *∈* K*n* uma solu¸c˜ao do sistema, tem-se

*A*

*A−*1*A In*

 

 

 

 

*α*1 ...

*αn α*1 ...

*αn α*1 ...

*αn α*1 ...

*αn*



 = *B*



 = *A−*1*B*



 = *A−*1*B*



 = *A−*1*B.*

Num sistema de Cramer podemos determinar a solu¸c˜ao atrav´es da matriz *A−*1.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 20 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Exemplo

O sistema de equa¸c˜oes lineares, nas inc´ognitas *x, y, z*, sobre R,

*x* + *y* = 1

*y* + *z* = 2

*x* + *y* + *z* = 0

tem como matriz simples

(*S*)

 

*A* =



1 1 0

0 1 1 1 1 1



*.*

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 21 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Exemplo

Verificamos facilmente que *A* ´e invert´ıvel com *A−*1 = portanto, (*S*) ´e um sistema de Cramer.



0 *−*1 1

1 1 *−*1

*−*1 0 1



 e,

Pelo processo descrito anteriormente, a solu¸c˜ao do sistema pode ser calculada atendendo a que

*A−*1*B* =



0 *−*1 1

1 1 *−*1

*−*1 0 1

 



12 0



 =



*−*23 *−*1



*,*

sendo *B* a matriz dos termos independentes. Logo a solu¸c˜ao de (*S*) ´e (*−*2*,* 3*, −*1).

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 22 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Observa¸c˜ao

No Cap´ıtulo 1 apresent´amos um m´etodo para a determina¸c˜ao da inversa de uma matriz invert´ıvel *A ∈ Mn×n*(K) que represent´amos esquematicamente por

[*A|In*] *−−−−−−−→* (*linhas*)[*In|A−*1]*.*

Dispomos agora de uma forma de interpretar esse m´etodo em termos de resolu¸c˜ao de sistemas de equa¸c˜oes lineares.

Se *A* ´e invert´ıvel s˜ao poss´ıveis determinados os *n* sistemas de equa¸c˜oes lineares

(*Si*) *AX* = *Bi,*

em que *Bi* corresponde `a coluna *i* de *In*, *i* = 1*, . . . , n*.

Notemos que a solu¸c˜ao (´unica) do sistema (*Si*) ´e a coluna *i* de *A−*1, pois *A**C*1 *· · · Cn*= *In,* em que *Ci* corresponde `a solu¸c˜ao de (*Si*), *i* = 1*, . . . , n*.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 23 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Observa¸c˜ao

De acordo com o Corol´ario 1.79

*A−*1 =*C*1 *· · · Cn**.*

Podemos ent˜ao concluir que a determina¸c˜ao de *A−*1 pode ser feita resolvendo os *n* sistemas de equa¸c˜oes lineares

*AX* =

 

1 0 ...

0







*, . . . , AX* =

0 0 ...

1



*,*

todos com a mesma matriz simples *A*, e em que as matrizes dos termos independentes s˜ao, respectivamente, as colunas 1*, . . . , n* de *In*. Tais sistemas, por terem a mesma matriz simples, podem ser resolvidos simultaneamente, o que corresponde ao m´etodo descrito no Cap´ıtulo 1.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 24 / 1

2. Sistemas de Equa¸c˜oes Lineares

Proposi¸c˜ao

*Sejam A, B ∈ Mn×n*(K)*. A matriz AB ´e invert´ıvel se, e s´o se, A e B s˜ao ambas invert´ıveis.*

Dem. Atendendo a 3 da Proposi¸c˜ao 1.29, demonstremos apenas que se *AB* ´e invert´ıvel ent˜ao *A* e *B* s˜ao ambas invert´ıveis.

Se *B* n˜ao ´e invert´ıvel ent˜ao o sistema *BX* = 0 ´e poss´ıvel indeterminado. Como qualquer solu¸c˜ao deste sistema ´e ainda solu¸c˜ao do sistema (*AB*)*X* = 0, resulta que (*AB*)*X* = 0 ´e tamb´em poss´ıvel indeterminado e, portanto, *AB* n˜ao ´e invert´ıvel.

Demonstr´amos assim que se *AB* ´e invert´ıvel ent˜ao *B* ´e invert´ıvel e, como o produto de matrizes invert´ıveis ´e invert´ıvel, conclu´ımos tamb´em que (*AB*)*B−*1 = *A* ´e invert´ıvel.

Departamento de Matem´atica (FCT/UNL) Algebra Linear e Geometria Anal´ıtica ´ 25 / 1